半無限計画とその周辺

Semi-Infinite Programming and Related Topics

伊藤　聡

Satoshi Ito

統計数理研究所[1]

The Institute of Statistical Mathematics[2]

mailto:sito@ism.ac.jp

http://www.ism.ac.jp/~sito/

Abstract. We first formulate semi-infinite programming problems in a functional analytic setting and derive optimality conditions and several duality results, and then briefly survey numerical methods of semi-infinite programming. A computational framework for solving convex problems is given as an appendix.

Key words: Semi-infinite programming, nonlinear programming, convex programming, optimality condition, Karush–Kuhn–Tucker condition, Lagrange multiplier, duality.

AMS subject classification: Primary 90C34, 49M39; Secondary 90C48, 90C25, 49K27, 49N15, 49N10, 65K05.

1　はじめに

数理計画問題は一般に次のように定式化される．

$$\min_x \ f(x)$$
$$\text{subj. to} \quad G(x) \leq 0$$

ここで，X を線形空間，Y を順序線形空間とし，$f : X \to R$, $G : X \to Y$ とする．順序は一般に凸錐を定めることにより定義される．すなわち Y における凸錐 C に対して $y \in C$ のとき $y \geq 0$ と定義することができる．このように定義された順序は反射律・反対称律・推移律を満たすいわゆる半順序であり，順序を定義する錐を順序錐（この場合は正錐）という．X, Y および Y における順序を定めると問題の性質がある程度定まる．例えば，$X = R^n$, $Y = R^m$ とし，Y における順序錐をその第 1 象限（あるいは部分空間の第 1 象限）としたものが通常の非線形計画であり，また $X = R^m$, Y を n 次対称行列の空間とし，Y における順序錐を半正定値行列からなる凸錐としたものが，いまはやりの半正定値計画である[3]．さらに無限次元に目を向ければこのような組み合わせは文字通り無限に存在する．ところで，最適解の局所的な振舞いを解析するためには X, Y にノルムなどにより位相を導入する必要がある．有限次元の場合には任意のノルムは等価であるから，どんなノルムを用いてもあまり差はないが，無限次元の場合はそうではない．問題に応じて注意深く空間と位相を定めなければならない．

さて本稿の主題は半無限計画である．半無限というと X, Y のうちいずれか一方が有限次元で他方が無限次元の場合をさすと考えるのが自然ではあるが，通常 X が有限次元で Y が無限次元の場合を意味することが多い．本稿でもこの場合を取り扱う．ついでながら，X が無限次元で Y が有限次元という場合は，例えば古典的変分法でいう等周問題などに見られるように，数理計画の歴史の中でも最も古い起源を持つ．本稿における半無限計画はしたがって有限次元空間における無限個の制約条件つき最適化であり，このような問題は一般の近似問題，分権システ

[1] 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7

[2] 4-6-7 Minami-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106-8569

[3] 現在のところ半正定値計画といえば f, G がともにアフィンである場合をさすのが普通であり，一般の場合は非線形半正定値計画と呼ばれている．

ムにおける資源配分，競争状況下での意志決定，多目的最適化，信号処理，制御系の設計など工学のあらゆる分野に現われる．また，無限制約式は適当な条件のもとで最適化操作を含む式に等価的に変換され，半無限計画問題は最適値関数を含む 2 レベル最適化問題とみなせる．この意味で，半無限計画の理論は階層的最適化に対する基礎を与えるともいえる．半無限計画一般に関する文献としては，Hettich [21], Fiacco–Kortanek [10], Anderson–Philpott [2] などの初期の会議録，Polak [43], Hettich–Kortanek [24] などのサーベイ論文，Glashoff–Gustafson [11, 12], Krabs [34], Hettich–Zencke [22], 志水 [56, 11 章], 志水–相吉 [57, 11 章], Anderson–Nash [3, ch 4], Polak [44, ch 3], Shimizu et al. [58, ch 10], Goberna–López [14], Reemtsen–Rückmann [49] などの成書がある．

本稿では一般の非線形の半無限計画問題に対して，関数解析的な手法を用いてその双対性と最適性条件について考察する．まず第 2 節で半無限計画問題を定式化する．制約関数のインデックスパラメータに関する連続性およびインデックス集合のコンパクト性を仮定して，インデックス集合上で連続な関数からなる関数空間への作用素として制約関数を再定義する．この関数空間における順序・位相を非負関数からなる錐および一様ノルムでそれぞれ定義して得られる非線形計画問題を考える．第 3 節では凸性の仮定のもとで半無限計画問題の双対性について述べる．一般に凸計画問題に対しては Slater の制約想定のもとで強双対性が成立することがよく知られている．半無限計画における双対問題はインデックス集合上の有限な符号つき正則 Borel 測度の空間で定式化される．第 4 節では微分可能性の仮定のもとで半無限計画問題の最適性条件として Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 型の条件を導く．ここで Lagrange 乗数はやはりインデックス集合上の有限な符号つき正則 Borel 測度として定義されるが，KKT 条件を満たす乗数の集合は，空集合でない限り，必ず有限個の点からなる台を持つ測度を含むことを示す．したがって任意の制約想定のもとで，そのような (通常 Haar 測度と呼ばれる)離散測度の存在が保証されることになる．次に半無限計画問題に対する数値解法について第 5 節で概観する．第 6 節では半無限計画に関連する話題について簡単に触れる．また，第 3 節および第 4 節で得られた半無限計画の基本的性質に基づいた数値解法の一例として，著者らが双対パラメトライゼーション法と呼んでいる手法 [28, 37] を付録に載せた．半無限線形計画の典型的な例題に対する数値実験結果を最後に示す．

2 半無限計画問題

以下では次のような半無限計画問題を考える．

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ \text{subj. to} & g(x,\omega) \le 0 \quad \forall \omega \in \Omega \end{array}$$

ここで $x \in R^n$, $f : R^n \to R$, またインデックス集合 Ω に対して $g : R^n \times \Omega \to R$ とし，次の仮定をおく．

仮定 **1.** Ω はコンパクトな Hausdorff 空間であり，g はすべての $x \in R^n$ に対し ω に関して連続である．

このとき問題 (1) は最大値関数を含む最適化問題として等価に次のように書ける．

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ \text{subj. to} & \max\limits_{\omega\in\Omega} g(x,\omega) \le 0 \end{array}$$

Ω 上のすべての連続関数からなる線形空間に一様ノルムを定義することにより得られる Banach 空間を $C(\Omega)$ で表わす．作用素 $G : R^n \to C(\Omega)$ を

$$(2)\qquad G(x)(\omega) \triangleq g(x,\omega) \quad \text{on } \Omega$$

と定義すると，問題 (1) は

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ \text{subj. to} & G(x) \le 0 \end{array}$$

と書ける．ただし $C(\Omega)$ における順序はすべての非負関数からなる錐で与えられるものとする．

次節以降，必要に応じて関数 f, g の凸性および微分可能性に関する以下の仮定をおく．

仮定 **2.** f は凸であり，g はすべての $\omega \in \Omega$ に対して x に関して凸である．

仮定 **3.** f は R^n 上で微分可能であり，g は $R^n \times \Omega$ 上で x に関して連続微分可能である．

また制約想定を以下のように定義する．

定義 **1 (Slater** の制約想定**).**

$$g(x,\omega) < 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

を満たす $x \in R^n$ が存在するとき，g は Slater の制約想定を満たすという．

定義 2 (Cottle の制約想定).

$$g_x(x^*,\omega)s < 0 \quad \forall\omega \in \bar{\Omega}(x^*)$$

を満たす $s \in R^n$ が存在するとき，g は x^* で Cottle の制約想定を満たすという．ここで $\bar{\Omega}(x^*)$ は

$$\bar{\Omega}(x^*) \triangleq \{\, \omega \in \Omega \mid g(x^*,\omega) = 0 \,\}$$

で定義される活性なインデックスの集合である．

Slater の制約想定は $-G(x)$ が $C(\Omega)$ の順序錐の内点となること，すなわち $G(x) < 0$ を満たす x が存在することを意味する．仮定 2 および 3 のもとで Slater の制約想定を満たす関数は任意の許容点において Cottle の制約想定を満たすことに注意されたい．

3 双対理論

Lagrange 関数 $L : R^n \times M(\Omega) \to R$ を

$$L(x,\Lambda) \triangleq f(x) + \langle \Lambda, G(x)\rangle$$

と定義する．ここで $M(\Omega)$ は $C(\Omega)$ の双対空間を表わすものとする．通常これは Ω 上の有限な符号つき正則 Borel 測度の空間として表現され，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は Radon 積分を使って

$$\langle \Lambda, y\rangle = \int_\Omega y(\omega)\, d\Lambda$$

で与えられる $M(\Omega)$ と $C(\Omega)$ の双対ペアを表わす [73]．このとき主問題 (3) に対応する Lagrange 双対問題は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} &\max_{\Lambda} \ \min_{x} \ L(x,\Lambda) \\ &\text{subj. to} \quad \Lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ただし $M(\Omega)$ における順序は $C(\Omega)$ の順序錐の双対錐で，すなわち

$$\Lambda \geq 0 \iff \langle \Lambda, y\rangle \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

により定められるものとする．

Slater 型の制約想定のもとで一般の凸計画問題に対して強双対性が成立することはよく知られている [39]．仮定 2 のもとで，(2) 式で定義された作用素 G が $C(\Omega)$ の順序錐に関して凸であること，また問題 (3) の許容領域が R^n で凸であることに注意されたい．強双対定理は以下のように述べられる．

定理 1 (強双対性). 仮定 1 および 2 が成り立ち，制約関数 g が Slater の制約想定を満たすとする．主問題 (3) が $x^* \in R^n$ で最小値をとるならば，双対問題 (4) に解 $\Lambda^* \in M(\Omega)$ が存在し，このとき以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} &f(x^*) = \min_x L(x,\Lambda^*) \\ &\langle \Lambda^*, G(x^*)\rangle = 0 \\ &x^* \in \arg\min_x L(x,\Lambda^*) \end{aligned} \tag{5}$$

証明. 省略．例えば [39] の Section 8.6, Theorem 1 を参照． □

仮定 2 のもとで Lagrange 関数は x に関して凸であるから，仮定 3 のように f および g の微分可能性を仮定すれば，Lagrange 問題 $\min_x L(x,\Lambda)$ の解集合は任意の Λ に対して $\nabla_x L(x,\Lambda) = 0$ で完全に特徴づけられる (G の微分可能性は仮定 3 のもとで保証される．第 4 節の補助定理 2 を参照のこと .) すなわち双対問題 (4) は次の Wolfe の双対問題 [72, 41] と等価である．

$$\begin{aligned} &\max_{x,\Lambda} \ L(x,\Lambda) \\ &\text{subj. to} \quad \nabla_x L(x,\Lambda) = 0 \\ &\qquad\qquad\ \ \Lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

しかし，以下に挙げるような典型的な例を除けば、この変換により元の Lagrange 形式 (4) が持つ凹性が失われるため，双対問題をこのような形式で表現することは一般には得策でない．

ここで，半無限凸計画の特殊だが重要な例として，2 次および線形の場合を考える．まず次の半無限凸 2 次計画問題を考えよう．

$$\begin{aligned} &\min_x \ \frac{1}{2}x^T Q x + b^T x \\ &\text{subj. to} \quad Ax \leq c \end{aligned} \tag{7}$$

ただし，$0 \leq Q \in R^{n\times n}, b \in R^n, A \in B\big(R^n, C(\Omega)\big)$ および $c \in C(\Omega)$ とし[4]，さらに $Ax < c$ を満たす $x \in R^n$ が存在するとする．ここで制約条件 $Ax \leq c$ は

$$a(\omega)^T x \leq c(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega$$

の形の無限制約式を表わす．このとき $(Ax)(\omega) = a(\omega)^T x$ である．

[4] $A \in B(X,Y)$ は A が X から Y への連続な線形作用素であることを表わすものとする．

いま

$$f(x) \triangleq \frac{1}{2}x^T Q x + b^T x, \quad G(x) \triangleq Ax - c$$

とおけば，

$$\begin{aligned} L(x, \Lambda) &= \frac{1}{2}x^T Q x + b^T x + \langle \Lambda, Ax - c \rangle \\ &= -\frac{1}{2}x^T Q x - \langle \Lambda, c \rangle + x^T (Qx + b + A^* \Lambda) \end{aligned}$$

となる．ただし A^* は A の双対作用素である．ここで

$$\nabla_x L(x, \Lambda) = Qx + b + A^* \Lambda$$

であるから次の Dorn の双対問題 [6, 7] を得る．

$$\begin{aligned} &\min_{x, \Lambda} \ \frac{1}{2}x^T Q x + \langle \Lambda, c \rangle \\ &\text{subj. to} \quad Qx + b + A^* \Lambda = 0 \\ &\qquad\qquad \Lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

(max を min に書き換えたため符号が変わっているが) 目的関数が $L(x, \Lambda) - x^T \nabla_x L(x, \Lambda)$ になっている点が Wolfe 形式と異なることに注意されたい．行列 Q が正定のとき, すなわち半無限強凸 2 次計画問題に対しては，さらに

$$\begin{aligned} &\min_{\Lambda} \ \frac{1}{2}(A^* \Lambda + b)^T Q^{-1} (A^* \Lambda + b) + \langle \Lambda, c \rangle \\ &\text{subj. to} \quad \Lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

と書け，その解 Λ^* に対して主問題の解 x^* は一意に

$$x^* = -Q^{-1}(A^* \Lambda^* + b) \tag{10}$$

で与えられる．

次に線形の場合を考えよう．

$$\begin{aligned} &\min_{x} \ b^T x \\ &\text{subj. to} \quad Ax \leq c \end{aligned} \tag{11}$$

ここで b, A, c は問題 (7) と同様である．この場合は，双対問題 (8) において $Q = 0$ とおくと，

$$\begin{aligned} &\min_{\Lambda} \ \langle \Lambda, c \rangle \\ &\text{subj. to} \quad b + A^* \Lambda = 0 \\ &\qquad\qquad \Lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．

4 最適性条件

第 3 節では半無限凸計画に対する大域的な双対性について考察したが，この節では半無限計画における Lagrange 乗数の性質を調べるために微分可能性の仮定のもとでの局所的な振舞いについて考察する．

まず，次の補助定理は (2) 式で定義された作用素 G の微分可能性について述べている．

補助定理 2. 仮定 1 および 3 が成り立つとする．作用素 $G : R^n \to C(\Omega)$ は Fréchet の意味で連続微分可能であり，その $x \in R^n$ における導値 $G'(x) \in B\big(R^n, C(\Omega)\big)$ は

$$\big(G'(x)s\big)(\omega) = g_x(x, \omega)s \quad \text{on } \Omega \quad (\forall s \in R^n) \tag{13}$$

で与えられる．

証明. 省略．文献 [28] の Lemma 1 あるいは [29] の補助定理 5 を参照． □

導値 $G'(x)$ の双対作用素を $\nabla G(x) \in B\big(M(\Omega), R^n\big)$ で表わすことにする．すなわち

$$\nabla G(x)\Lambda = \int_{\Omega} \nabla_x g(x, \omega)\, d\Lambda \quad \big(\forall \Lambda \in M(\Omega)\big) \tag{14}$$

とする．ここで g_x および $\nabla_x g$ に対しても同様な記法を使っていることに注意されたい．この場合それぞれ n 次元行ベクトルおよび列ベクトルになる．

問題 (1) に対する Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件は次のようになる．

定理 3 (KKT 条件). 仮定 1 および 3 が成り立ち，制約関数 g が $x^* \in R^n$ で Cottle の制約想定を満たすとする．問題 (1) が x^* において最小値をとるための必要条件は，x^* が許容解で

$$\begin{aligned} &\nabla_x L(x^*, \Lambda^*) = \nabla f(x^*) + \nabla G(x^*)\Lambda^* = 0 \\ &\langle \Lambda^*, G(x^*) \rangle = 0, \quad \Lambda^* \geq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

すなわち

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) + \int_{\Omega} \nabla_x g(x^*, \omega)\, d\Lambda^* = 0 \\ &\int_{\Omega} g(x^*, \omega)\, d\Lambda^* = 0 \\ &\Lambda^* \geq 0 \ (\ \Lambda^* \text{ は正則な Borel 測度 }) \end{aligned} \tag{16}$$

を満たす $\Lambda^* \in M(\Omega)$ が存在することである．

証明. 定理の仮定および補助定理 2 のもとで

$$G(x^*) + G'(x^*)\, s < 0$$

を満たす $s \in R^n$ の存在が容易に示せる．したがって，例えば [39] の Section 9.4, Theorem 1 により，(15) を満たす Λ^* が存在する．(14) 式の表現を用いれば，直ちに (16) が得られる． □

KKT 条件を満たす乗数 $\Lambda^* \in M(\Omega)$ は一般には一意ではないが，以下が成立する．

定理 4. 仮定 1 および 3 が成り立つとし，$x^* \in R^n$ は許容解であるとする．このとき KKT 条件 (15) すなわち (16) を満たす乗数の集合は，空集合でなければ必ず，高々 n 個の点からなる台を持つ測度を含む．

証明. KKT 条件 (15) すなわち (16) を満たす $\Lambda^* \in M(\Omega)$ が存在するとする．制約関数 g の ω に関する連続性により，x^* において活性なインデックスの集合 $\bar{\Omega}(x^*)$ は Ω において閉，したがってコンパクトであり，その補集合

$$\Omega \setminus \bar{\Omega}(x^*) = \{\, \omega \in \Omega \mid g(x^*, \omega) < 0 \,\}$$

は開集合である．

(16) の相補条件は，Λ^* の非負条件とともに，$\Omega \setminus \bar{\Omega}(x^*)$ 上で $\Lambda^* = 0$ であることを意味する．このとき (16) の停留条件は

$$(17)\quad \nabla f(x^*) + \int_{\bar{\Omega}(x^*)} \nabla_x g(x^*, \omega)\, d\Lambda^* = 0$$

となるが，これは

$$(18)\quad -\nabla f(x^*) \in \mathrm{cone}\{\, \nabla_x g(x^*, \omega) \mid \omega \in \bar{\Omega}(x^*) \,\}$$

と等価である．これらが等価であることは積分論からすれば自明のことであるが，ここでは簡単に (ただし数理計画法的に) 証明しておく．

R^n の部分集合 S と X を以下のように定義する．

$$S = \left\{ \int_{\bar{\Omega}(x^*)} \nabla_x g(x^*, \omega)\, d\Lambda \;\middle|\; \Lambda \geq 0 \right\}$$

$$X = \{\, \nabla_x g(x^*, \omega) \mid \omega \in \bar{\Omega}(x^*) \,\}$$

明らかに S は凸錐で $S \supset X$，故に $S \supset \mathrm{cone}\, X$ である．$S \subset \mathrm{cone}\, X$ であることを示そう．$0 \neq s \in S$ とすると，$\int_{\bar{\Omega}(x^*)} d\Lambda \neq 0$ なるある $\Lambda \geq 0$ に対して

$$s = \int_{\bar{\Omega}(x^*)} \nabla_x g(x^*, \omega)\, d\Lambda$$

となる．いま

$$s_0 \triangleq s \Big/ \int_{\bar{\Omega}(x^*)} d\Lambda \notin \mathrm{co}\, X$$

であると仮定する．$\nabla_x g$ の連続性と $\bar{\Omega}(x^*)$ のコンパクト性より X は R^n におけるコンパクト集合であるから，$\mathrm{co}\, X$ もまたコンパクトしたがって閉集合である．このとき，凸集合の強意の分離定理より

$$(19)\quad a^T s_0 > \alpha$$
$$a^T x \leq \alpha \quad \forall x \in \mathrm{co}\, X$$

を満たす $a \in R^n$ および $\alpha \in R$ が存在する．故に

$$a^T \nabla_x g(x^*, \omega) \leq \alpha \quad \forall \omega \in \bar{\Omega}(x^*)$$

したがって

$$a^T s_0 = \int_{\bar{\Omega}(x^*)} a^T \nabla_x g(x^*, \omega)\, d\Lambda \Big/ \int_{\bar{\Omega}(x^*)} d\Lambda \leq \alpha$$

を得るが，これは (19) に矛盾する．よって $s_0 \in \mathrm{co}\, X$，したがって $s \in \mathrm{cone}\, X$ を得る．以上により，$S = \mathrm{cone}\, X$，またその結果として (17) と (18) の等価性が示された．

ここで Carathéodory の定理あるいはその系 [41, 50] により，ある $\omega_i \in \bar{\Omega}(x^*)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (ただし $k \leq n$) に対して

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla_x g(x^*, \omega_i)$$

となる $\lambda^* \in R^n$ の存在が保証される．これに対応する測度 Λ^* は明らかに (16) を満たし，したがって題意の離散測度である． □

定理 3 および 4 より次の系が直ちに得られる．

系 5. 仮定 1 および 3 が成り立ち，制約関数 g が $x^* \in R^n$ で Cottle の制約想定を満たすとする．問題 (1) が x^* において最小値をとるならば，KKT 条件 (15) すなわち (16) を満たす乗数の集合は常に高々 n 個の点からなる台を持つ測度を含む．

また同時に，Fritz John [31] によって本質的に与えられた次の古典的結果を正当化する．

系 6 (KKT 条件). 仮定 1 および 3 が成り立ち，制約関数 g が $x^* \in R^n$ で Cottle の制約想定を満たす

とする．問題 (1) が $x^* \in R^n$ において最小値をとるための必要条件は，x^* が許容解で

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla_x g(x^*, \omega_i) = 0$$
$$\lambda_i^* g(x^*, \omega_i) = 0, \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$
$$k \leq n$$

を満たす $\lambda_i^* \in R$ および $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, k$ が存在することである．

5 数値解法概観

半無限計画問題の数値解法については，最近のサーベイ論文 [48] があるので詳細はそちらを参照していただくこととして，この節ではごく簡単に概観するにとどめる．また初期のサーベイについては [23, 63, 24] などを参照されたい．

半無限計画問題の数値解法の基本的なカテゴリとしては，離散化による手法と局所簡約による手法とがある．第 1 のカテゴリは，あらかじめ定められたあるいは適応的に制御されたグリッド生成規則または切除平面法により有限個の制約条件に緩和された問題の列を非線形計画法により繰り返し解いていく方法である．第 2 のカテゴリである局所簡約による方法では，半無限計画問題を陰に定義された有限個の不等式制約条件を持つ局所的に等価な非線形計画問題に置き換え，この非線形計画問題あるいはその KKT 条件を通常 Newton 法を用いて解く．一般に，離散化による手法は信頼性があるが，反復が進むにつれて計算コストが増大する．一方，局所簡約による手法は，そのすぐれた局所収束性を保証するためには最適解に十分近い初期推定点が必要となる．したがって，これらの手法がそれぞれ持つ大域および局所的収束性という長所を生かすために，両手法を組み合わせて使おうとするのは自然なことである．1970 年代の Gustafson [16, 17, 18, 19] の研究に端を発するこの種のハイブリッド解法 (2 段階法とも呼ばれる) は，まず初期の段階で離散化法により十分な精度の近似解を得てから，より高精度の解を求めて局所簡約法に移行する (文献 [22] も参照) . 局所簡約法のグローバル化に関しては，他に [69, 70, 71, 61, 62, 63, 46, 27, 24, 15, 47, 5] などがあげられるが，その多くは逐次 2 次計画法の枠組を使って大域的収束性を保証している．

他の数値解法としては，交換法，微分不可能最適化法，内点法などがある．半無限線形計画へのシンプレックス法系統の解法の拡張という狭い意味での典型的な交換法は，端点を生成する初期段階と最適解に収束する隣接端点の列を生成する段階からなる．双対交換法は直接的だが，数値的不安定になりやすい．主交換法は双対法ほど適用範囲は広くないが数値的には安定している．交換法は，滑らかな問題に対しては計算効率の点で離散化法あるいは局所簡約法にはるかに及ばないが，インデックス集合が加算無限集合の場合など広いクラスの問題に適用できるという利点がある．半無限線形計画および交換法については Anderson–Nash [3] あるいは Goberna–López [13, 14] が詳しい．半無限計画問題を最適値関数を含む 2 レベル最適化問題とみれば，バンドル法など一般勾配に基づいた微分不可能最適化手法を適用することができる．制約関数 g が十分滑らかであっても最大値関数は一般に微分不可能であることに注意されたい．微分不可能最適化手法は滑らかな半無限計画問題に対してはあまり効率的ではないが，元々滑らかでない非線形目的関数あるいは制約関数を持つ問題あるいは次節で述べるインデックス集合がパラメトリックである場合には有力な候補となる．微分不可能最適化の観点から見た半無限計画の理論および算法については，Polak [43, 44] あるいは Shimizu et al. [58] を参照されたい．またこれに関連した精密ペナルティ法によるアプローチが [30, 65] にある．半無限計画問題に対する内点法は，制約式の数が無限に近づいたときの極限的な振舞いを理論的に調べることを主な目的として研究されてきた [8, 59, 9, 33, 45, 36, 60, 66, 1, 35, 68, 55, 67]．他の算法の枠組の中で有限次元の補助問題を解くために内点法を用いて成功したという報告は多いが，内点法の半無限計画への直接の拡張についてはいまのところあまり良い結果は出ていないようである．

6 その他の話題—結びにかえて

以下のように無限制約式のインデックス集合が決定変数 x に依存する場合は一般化半無限計画問題と呼ばれる．

$$\min_x \ f(x)$$
$$\text{subj. to} \quad g(x, \omega) \leq 0 \quad \forall \omega \in \Omega(x)$$

具体的には，例えば $\Omega(x)$ が $\gamma : R^n \times R^p \to R^q$ および $\eta : R^n \times R^p \to R^r$ を用いて

$$\Omega(x) = \{\, \omega \in R^p \mid \gamma(x,\omega) \le 0,\ \eta(x,\omega) = 0 \,\}$$

と与えられている場合，次のように書ける．

$$\begin{aligned} &\min_x \ f(x) \\ &\text{subj. to} \quad v(x) \le 0 \\ &\qquad\quad v(x) = \max_\omega \ g(x,\omega) \\ &\qquad\qquad\quad \text{subj. to} \quad \gamma(x,\omega) \le 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \eta(x,\omega) = 0 \end{aligned}$$

このような問題に対しては微分不可能最適化からの研究（例えば Shimizu et al. [58, ch 11] を参照）が以前からあるが，最適性条件に関する報告が最近いくつか見られる [25, 32, 52, 53]．

また，次のような典型的な最適制御問題[5]

$$\begin{aligned} &\min_u \ \ F_0\big(x(T)\big) + \int_0^T f_0\big(x(t),u(t),t\big)\,dt \\ &\text{subj. to} \quad \dot{x}(t) = f\big(x(t),u(t),t\big), \ \ x(0) = x_0 \\ &\qquad\quad g\big(x(t),u(t),t\big) \le 0 \end{aligned}$$

を解く最も普通の方法は，制御変数 u を何らかの方法でパラメトライズして離散化し，半無限計画問題として解くことであろう．詳細は Teo et al. [64] や文献 [54, 38] を参照されたい．

この他にも例えば，半正定値計画問題は（有用であるかどうかは別にして）そのまま半無限計画問題とみなせるし，大域的最適化問題において最適値を求めることは半無限線形計画問題を解くことに等しい，など半無限計画の適用範囲は非常に広いといえる．本稿では半無限計画のごく基本的な事柄に絞って解説してきたが，浅学非才の著者のことであるから，重大な誤りのあることを恐れる．本稿が多少なりとも読者諸賢のお役に立てば幸いである．

参考文献

[1] K. D. Andersen and E. Christiansen, Limit analysis with the dual affine scaling algorithm, Journal of Computational and Applied Mathematics 59 (1995), 233–243.

[2] E. J. Anderson and A. B. Philpott, eds., *Infinite Programming*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 259, Springer, Berlin, 1985.

[3] E. J. Anderson and P. Nash, *Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces: Theory and Applications*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, Chichester, England, 1987.

[4] J. W. Blankenship and J. E. Falk, Infinitely constrained optimization problems, Journal of Optimization Theory and Applications 19 (1976), 261–281.

[5] I. D. Coope and C. J. Price, Exact penalty function methods for nonlinear semi-infinite programming, in: [49], pp. 137–157.

[6] W. S. Dorn, Duality in quadratic programming, Quarterly of Applied Mathematics 18 (1960), 155–162.

[7] W. S. Dorn, A duality theorem for convex programs, IBM Journal of Research and Development 4 (1960), 407–413.

[8] M. C. Ferris and A. B. Philpott, An interior point algorithm for semi-infinite linear programming, Mathematical Programming 43 (1989), 257–276.

[9] M. C. Ferris and A. B. Philpott, On affine scaling and semi-infinite programming, Mathematical Programming 56 (1992), 361–364.

[10] A. V. Fiacco and K. O. Kortanek, eds., *Semi-Infinite Programming and Applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 215, Springer, Berlin, 1983.

[11] K. Glashoff and S.-Å. Gustafson, *Einführung in die lineare Optimierung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978.

[12] K. Glashoff and S.-Å. Gustafson, *Linear Optimization and Approximation*, Applied Mathematical Sciences 45, Springer, New York, 1983.

[13] M. A. Goberna and M. A. López, A comprehensive survey of linear semi-infinite optimization theory, in: [49], pp. 3–27.

[14] M. A. Goberna and M. A. López, *Linear Semi-Infinite Optimization*, Wiley Series in Mathematical Methods in Practice 2, Wiley, Chichester, England, 1998.

[15] G. Gramlich, R. Hettich and E. W. Sachs, Local convergence of SQP-methods in semi-infinite programming, SIAM Journal on Optimization 5 (1995), 641–658.

[5] この場合の Lagrange 乗数（双対変数）は一般に絶対連続な測度と離散測度を足しあわせたものになる [26]．

[16] S.-Å. Gustafson, On the computational solution of a class of generalized moment problems, SIAM Journal on Numerical Analysis 7 (1970), 343–357.

[17] S.-Å. Gustafson and K. O. Kortanek, Numerical treatment of a class of semi-infinite programming problems, Naval Research Logistics Quarterly 20 (1973), 477–504.

[18] S.-Å. Gustafson, A general three-phase algorithm for nonlinear semi-infinite programs, in: *Operational Research '81*, ed. J. P. Brans, North-Holland, Amsterdam, 1981, pp. 495–508.

[19] S.-Å. Gustafson and K. O. Kortanek, Semi-infinite programming and applications, in: *Mathematical Programming: The State of the Art—Bonn 1982*, eds. A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte, Springer, Berlin, 1983, pp. 132–157.

[20] R. Hettich and H. Th. Jongen, Semi-infinite programming: conditions of optimality and applications, in: *Optimization Techniques*, Part 2, ed. J. Stoer, Lecture Notes in Control and Information Sciences 7, Springer, Berlin, 1978, pp. 1–11.

[21] R. Hettich, ed., *Semi-Infinite Programming*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 15, Springer, Berlin, 1979.

[22] R. Hettich and P. Zencke, *Numerische Methoden der Approximation und semi-infiniten Optimierung*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.

[23] R. Hettich, A review of numerical methods for semi-infinite optimization, in: [10], pp. 158–178.

[24] R. Hettich and K. O. Kortanek, Semi-infinite programming: theory, methods, and applications, SIAM Review 35 (1993), 380–429.

[25] R. Hettich and G. Still, Second order optimality conditions for generalized semi-infinite programming problems, Optimization 34 (1995), 195–211.

[26] S. Ito and K. Shimizu, Necessary conditions for constrained optimal control problems via mathematical programming, Numerical Functional Analysis and Optimization 11 (1990), 267–281.

[27] 伊藤 聡, 志水清孝, 無限制約最適化問題に対する双対準 Newton アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集 27 (1991), 452–457.

[28] S. Ito, Y. Liu and K. L. Teo, A dual parametrization method for convex semi-infinite programming, in: *Optimization: Techniques and Applications*, eds. K. L. Teo, P. F. Siew, Y. H. Leung, L. S. Jennings and V. Rehbock, Volume 1, Curtin University of Technology, Perth, Australia, 1998, pp. 550–557.

[29] 伊藤 聡, 半無限計画の最適性と双対性, 統計数理 46 (1998), 345–358.

[30] L. S. Jennings and K. L. Teo, A computational algorithm for functional inequality constrained optimization problems, Automatica 26 (1990), 371–375.

[31] F. John, Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, in: *Studies and Essays, Courant Anniversary Volume*, eds. K. O. Friedrichs, O. E. Neugebauer and J. J. Stoker, Wiley, New York, 1948, pp. 187–204.

[32] H. Th. Jongen, J.-J. Rückmann and O. Stein, Generalized semi-infinite optimization: a first order optimality condition and examples, Mathematical Programming 83 (1998), 145–158.

[33] K. O. Kortanek, Vector-supercomputer experiments with the primal affine linear programming scaling algorithm, SIAM Journal on Scientific Computing 14 (1993), 279–294.

[34] W. Krabs, *Optimization and Approximation*, Wiley, Chichester, England, 1979.

[35] A. S. Lewis and A. B. Philpott, Experiments with affine scaling and semi-infinite programming, New Zealand Journal of Mathematics 24 (1995), 49–71.

[36] C.-J. Lin, S.-C. Fang and S.-Y. Wu, A primal affine scaling based algorithm for solving linear semi-infinite programming problems, in: *Advances in Optimization and Approximation*, eds. D.-Z. Du and J. Sun, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994, pp. 217–233.

[37] Y. Liu, K. L. Teo and S. Ito, A dual parametrization approach to linear–quadratic semi-infinite programming problems, Optimization Methods and Software 10 (1999), 471–495.

[38] Y. Liu, S. Ito and K. L. Teo, A semi-infinite programming approach to continuously constrained LQ optimal control problems, in: *Proceedings of the 38th SICE Annual Conference*, International Session Papers Volume, 1999, pp. 1149–1154.

[39] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Method*, Wiley, New York, 1969.

[40] O. L. Mangasarian and J. Ponstein, Minmax and duality in nonlinear programming, Journal of Mathematical Analysis and Applications 11 (1965), 504–518.

[41] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Series in Systems Science, McGraw-Hill, New York, 1969.

[42] 中山弘隆, 谷野哲三, 多目的計画法の理論と応用, 計測自動制御学会, 1994.

[43] E. Polak, On the mathematical foundations of nondifferentiable optimization in engineering design, SIAM Review 29 (1987), 21–89.

[44] E. Polak, *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*, Applied Mathematical Sciences 124, Springer, New York, 1997.

[45] M. J. D. Powell, Log barrier methods for semi-infinite programming calculations, in: *Advances on Computer Mathematics and its Applications*, ed. E. A. Lipitakis, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 1–21.

[46] C. J. Price and I. D. Coope, An exact penalty function algorithm for semi-infinite programming, BIT 30 (1990), 723–734.

[47] C. J. Price and I. D. Coope, Numerical experiments in semi-infinite programming, Computational Optimization and Applications 6 (1996), 169–189.

[48] R. Reemtsen and S. Görner, Numerical methods for semi-infinite programming: a survey, in: [49], pp. 195–275.

[49] R. Reemtsen and J.-J. Rückmann, eds., *Semi-Infinite Programming*, Nonconvex Optimization and its Applications 25, Kluwer Academic, Boston, 1998.

[50] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Mathematical Series 28, Princeton University Press, 1970.

[51] K. Roleff, A stable multiple exchange algorithm for linear SIP, in: [21], pp. 83–96.

[52] J.-J. Rückmann and A. Shapiro, On first order optimality conditions in generalized semi-infinite programming, to appear in Journal of Optimization Theory and Applications.

[53] J.-J. Rückmann and A. Shapiro, Second order optimality conditions in generalized semi-infinite programming, to appear in Mathematics of Operations Research.

[54] E. W. Sachs, Semi-infinite programming in control, in: [49], pp. 389–411.

[55] U. Schättler, An interior-point method for semi-infinite programming problems, Annals of Operations Research 62 (1996), 277–301.

[56] 志水清孝, 多目的と競争の理論, 共立出版, 1982.

[57] 志水清孝, 相吉英太郎, 数理計画法, 昭晃堂, 1984.

[58] K. Shimizu, Y. Ishizuka and J. F. Bard, *Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming*, Kluwer Academic, Boston, 1997.

[59] G. Sonnevend, Applications of analytic centers for the numerical solution of semiinfinite, convex programs arising in control theory, in: *System Modelling and Optimization*, eds. H.-J. Sebastian and K. Tammer, Lecture Notes in Control and Information Sciences 143, Springer, Berlin, 1990, pp. 413–422.

[60] G. Sonnevend, A new class of a high order interior point method for the solution of convex semiinfinite optimization problems, in: *Computational and Optimal Control*, eds. R. Bulirsch and D. Kraft, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 193–211.

[61] Y. Tanaka, M. Fukushima and T. Hasegawa, Implementable L_∞ penalty function method for semi-infinite optimization, International Journal of Systems Science 18 (1987), 1563–1568.

[62] Y. Tanaka, M. Fukushima and T. Ibaraki, A globally convergent SQP method for semi-infinite nonlinear optimization, Journal of Computational and Applied Mathematics 23 (1988), 141–153.

[63] Y. Tanaka, M. Fukushima and T. Ibaraki, A comparative study of several semi-infinite nonlinear programming algorithms, European Journal of Operations Research 36 (1988), 92–100.

[64] K. L. Teo, C. J. Goh and K. H. Wong, *A Unified Approach to Optimal Control Problems*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 55, Longman Scientific & Technical, Essex, England, 1991.

[65] K. L. Teo, V. Rehbock and L. S. Jennings, A new computational algorithm for functional inequality constrained optimization problems, Automatica 29 (1993), 789–792.

[66] M. J. Todd, Interior-point algorithms for semi-infinite programming, Mathematical Programming 65 (1994), 217–245.

[67] L. Tuncel and M. J. Todd, Asymptotic behavior of interior point methods: a view from semi-infinite programming, Mathematics of Operations Research 21 (1996), 354–381.

[68] R. J. Vanderbei, Affine scaling trajectories associated with a linear semi-infinite program, Mathematics of Operations Research 20 (1995), 163–174.

[69] G. A. Watson, Globally convergent methods for semi-infinite programming, BIT 21 (1981), 362–373.

[70] G. A. Watson, Numerical experiments with globally convergent methods for semi-infinite programming problems, in: [10], pp. 193–205.

[71] G. A. Watson, Lagrangian methods for semi-infinite programming problems, in: [2], pp. 90–107.

[72] P. Wolfe, A duality theorem for non-linear programming, Quarterly of Applied Mathematics 19 (1961), 239–244.

[73] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 123, Springer, Berlin, 1980.

付録

A1: 双対パラメトライゼーション

半無限凸計画の局所的性質と大域的性質は次の命題により自然に結びつく．

補助定理 7. 仮定 1–3 が成り立ち，制約関数 g が Slater の制約想定を満たし，問題 (1) は $x^* \in R^n$ で最小値をとるものとする．このとき KKT 条件 (15) すなわち (16) を満たす乗数の集合は双対問題 (4) の解集合に一致する．

証明. 省略．文献 [28] の Lemma 3 あるいは [29] の補助定理 11 を参照． □

系 5 と補助定理 7 より直ちに次の命題が得られる．

定理 8. 仮定 1–3 が成り立ち，制約関数 g が Slater の制約想定を満たし，問題 (1) は $x^* \in R^n$ で最小値をとるものとする．このとき双対問題 (4) の解集合は常に高々 n 個の点からなる台を持つ測度を含む．

この定理より，離散測度からなる $M(\Omega)$ の部分集合上で双対問題の解を探索してもよいことがわかる．この部分集合の各要素は台を構成する有限個の点の位置とその測度の対で特徴づけられる．点の数を k (ただし $k \le n$) に固定し，定理 4 の証明にあるように，点の位置と測度を (ω_i, λ_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ で表わすことにする．このとき Wolfe の双対問題 (6) は次のようにパラメトライズされる．

$$
\begin{aligned}
&\max_{x,\, \omega_i, \lambda_i,\, i=1,2,\ldots,k} f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(x, \omega_i) \\
&\text{subj. to} \quad \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla_x g(x, \omega_i) = 0 \\
&\qquad\qquad \omega_i \in \Omega, \quad \lambda_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k
\end{aligned} \tag{20}
$$

以下では Ω が有限次元空間 R^p の部分集合の場合に限定して考える．このとき問題 (20) は有限次元の非線形計画問題となり，f と g の 2 回連続微分可能性を仮定すれば，通常の非線形計画法で解くことができる．

インデックス集合 Ω が不等式あるいは等式により陰に定義されている場合，例えば $\gamma : R^p \to R^q$ および $\eta : R^p \to R^r$ に対して

$$
\Omega = \{\, \omega \in R^p \mid \gamma(\omega) \le 0,\ \eta(\omega) = 0 \,\}
$$

と Ω が与えられている場合，双対問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\max_{x,\, \omega_i, \lambda_i,\, i=1,2,\ldots,k} f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(x, \omega_i) \\
&\text{subj. to} \quad \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla_x g(x, \omega_i) = 0 \\
&\qquad\qquad \gamma(\omega_i) \le 0, \quad \eta(\omega_i) = 0, \quad \lambda_i \ge 0 \\
&\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k
\end{aligned}
$$

整数 k は $1 \le k \le n$ の範囲で与える．最も自然な選択は $k = n$ であろうが，パラメトライズされた双対問題 (20) を数値的に解くことを考えると，k はできる限り小さくとるのが望ましい．$n > 1$ のとき，真の k は通常 n より (多くの場合かなり) 小さな値をとる．したがって大規模な問題に対しては，まず小さな値から始めて問題 (20) を解きながら適当な判定基準が満たされるまで k を徐々に増やしていくという方法が考えられる．

以上，双対問題の解法について述べてきたが，本当に欲しいのは主問題の最適解である．さて，双対

問題を解いてその解 Λ^* が得られたとしよう．このとき，主問題の任意の解が Lagrange 関数 $L(x, \Lambda^*)$ を最小にすることは定理 1 によって保証されている．しかし逆は成り立たない．すなわち，Lagrange 問題 $\min_x L(x, \Lambda^*)$ の解は必ずしも主問題の解であるとは限らない．

定理 9. 仮定 1–3 が成り立つとする．また Λ^* を双対問題 (4) の解とし，x^* を対応する Lagrange 問題の解とする (すなわち (x^*, Λ^*) を Wolfe の双対問題 (6) の解とする .) このとき x^* が $G(x^*) \leq 0$ と $\langle \Lambda^*, G(x^*) \rangle = 0$ をともに満たせば，x^* は主問題 (1) の解である．

証明. (x^*, Λ^*) が KKT 条件 (15) を満たすことおよび問題 (3) の凸性より明らか． □

以下の逆双対定理は定理 9 の仮定に対する十分条件を与える．

定理 10. 仮定 1–3 が成り立つとする．また Λ^* を双対問題 (4) の解とし，x^* を対応する Lagrange 問題の解とする (すなわち (x^*, Λ^*) を Wolfe の双対問題 (6) の解とする .) このとき $L(\cdot\,, \Lambda^*)$ が x^* の近傍で強凸ならば，x^* は $G(x^*) \leq 0$ および $\langle \Lambda^*, G(x^*) \rangle = 0$ を満たし，したがって x^* は主問題 (1) の解である．

証明. 省略．文献 [28] の Theorem 6 あるいは [29] の定理 14 を参照． □

f が強凸，あるいは測度 Λ^* の有限の台のうちいずれかの ω_i に対して $g(\cdot\,, \omega_i)$ が強凸ならば，$L(\cdot\,, \Lambda^*)$ は強凸である．また x^* の近傍で $L(\cdot\,, \Lambda^*)$ が強凸になるための別の十分条件として，$L(\cdot\,, \Lambda^*)$ が x^* で 2 回連続微分可能でヘッセ行列 $\nabla^2_{xx} L(x^*, \Lambda^*)$ が正則 (したがって正定) であることが挙げられるが，これは f および Λ^* の台のすべての ω_i に対して $g(\cdot\,, \omega_i)$ が x^* において 2 回連続微分可能で，さらに $\nabla^2 f(x^*)$ かいずれかの $\nabla^2_{xx} g(x^*, \omega_i)$ が正則であるときに成り立つ．

主問題に対して許容でないかあるいは相補条件を満たさない双対ペアから主問題の解を復元することは一般にはできないが，凸 2 次計画 (強凸でなくてよい．よって線形計画をも含む) については次の性質が成立する．

定理 11. $0 \leq Q \in R^{n \times n}, b \in R^n, A \in B\big(R^n, C(\Omega)\big)$ および $c \in C(\Omega)$ とする．また (x^*, Λ^*) を Dorn の双対問題 (8) の解とし，ξ^* をその等式制約に対応した乗数とする．このとき ξ^* は主問題 (7) の解を与える．

証明. 省略．文献 [28] の Theorem 7 あるいは [29] の定理 15 を参照． □

注意. Dorn の双対問題の代わりに Wolfe の双対問題を解いた場合，定理の結果は少々異なったものとなる: "(x^*, Λ^*) を Wolfe の双対問題の解とし，ξ^* をその等式制約に対応した乗数とする．このとき $x^* + \xi^*$ が主問題の解を与える"．

一般に半無限計画問題を解こうとする際に最もやっかいなことは，ある点が主問題の許容解であるかどうかをチェックすることである．これはインデックス集合 Ω 上で何らかの大域探索を行なわなければならないことを意味する．強凸でない非線形問題に対しては双対パラメトライゼーション法も例外ではない (定理 9 を参照) が，定理 10 および 11 にあるように, 強凸の場合あるいは凸 2 次の場合は許容性のチェックは不要になる．そのかわりパラメトライズされた双対問題 (20) の大域的最適解を求めなければならないが (強凸問題の場合は双対問題を解いて得られる x^* を，凸 2 次問題の場合は双対等式制約の乗数 ξ^* をそれぞれ主問題の解として) 双対ギャップを調べることにより，得られた解が大域解かどうかをチェックすることができる．真の k の値を正確に推定することは必ずしも重要ではないが，他の局所簡約法と同様に (特に ω_i の) 良い初期推定が必要である．小規模な問題に対しては試行錯誤でも十分だが，大規模な問題に対しては離散化法との組合せが必須となる．

A2: 数値例

以下の最良近似問題は半無限線形計画の標準的な例題 [51, 63, 14] であり，正の整数 n が与えられたとき $[0, 1]$ 上の正接曲線を上方から L_1 ノルムで最も良く近似する n 次未満の多項式を求める問題である．ここではインデックスパラメータとして ω のかわりに t を用いている．

$$(P_n) \qquad \begin{aligned} &\min_x \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i} \\ &\text{subj. to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \geq \tan t \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

これに対する Dorn の双対問題 (12) は前節にしたがって以下のようにパラメトライズされる．

$(D_{n,k})$

$$\min_{t_i,\lambda_i,\, i=1,2,\dots,k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c(t_i)$$

$$\text{subj. to} \quad b + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a(t_i) = 0$$

$$t_i \in [0,1], \;\; \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ただし

$$b = (1,\, 1/2,\, \dots,\, 1/n)^T$$
$$a(t) = -(1,\, t,\, \dots,\, t^{n-1})^T$$
$$c(t) = -\tan t$$

である．

Matlab を用いて数値実験を行なった．パラメトライズされた双対問題 $(D_{n,k})$ を解いて得られた解の大域性判定基準を，双対ギャップが 10^{-12} 以下になることとした．定理 11 より，問題 $(D_{n,k})$ の等式制約に対応した乗数として主問題 (P_n) の解が得られることに注意されたい．$n = 3$ から $n = 6$ までの結果を表 1 に示す．表中の $v(D_{n,k})$ および $v(P_n)$ はそれぞれ双対問題 $(D_{n,k})$，主問題 (P_n) の目的関数値を表わす．第 3 節で述べたように，$v(D_{n,k})$ の符号が逆転していることに注意されたい．図 1 は得られた近似多項式をそれぞれ図示したものである．

表 1: 数値結果

n	k	$(t_i,\, \lambda_i)$	$v(D_{n,k})$	x	$v(P_n)$
3	2	$(0.333, 0.750)$ $(1.000, 0.250)$	-0.649	0.089 0.423 1.045	0.649
4	3	$(0.000, 0.167)$ $(0.500, 0.667)$ $(1.000, 0.167)$	-0.624	0.000 1.146 -0.624 1.036	0.624
5	3	$(0.155, 0.376)$ $(0.645, 0.512)$ $(1.000, 0.111)$	-0.617	0.007 0.891 0.601 -0.934 0.994	0.617
6	4	$(0.000, 0.083)$ $(0.276, 0.417)$ $(0.724, 0.417)$ $(1.000, 0.083)$	-0.616	0.000 1.023 -0.241 1.222 -1.389 0.941	0.616

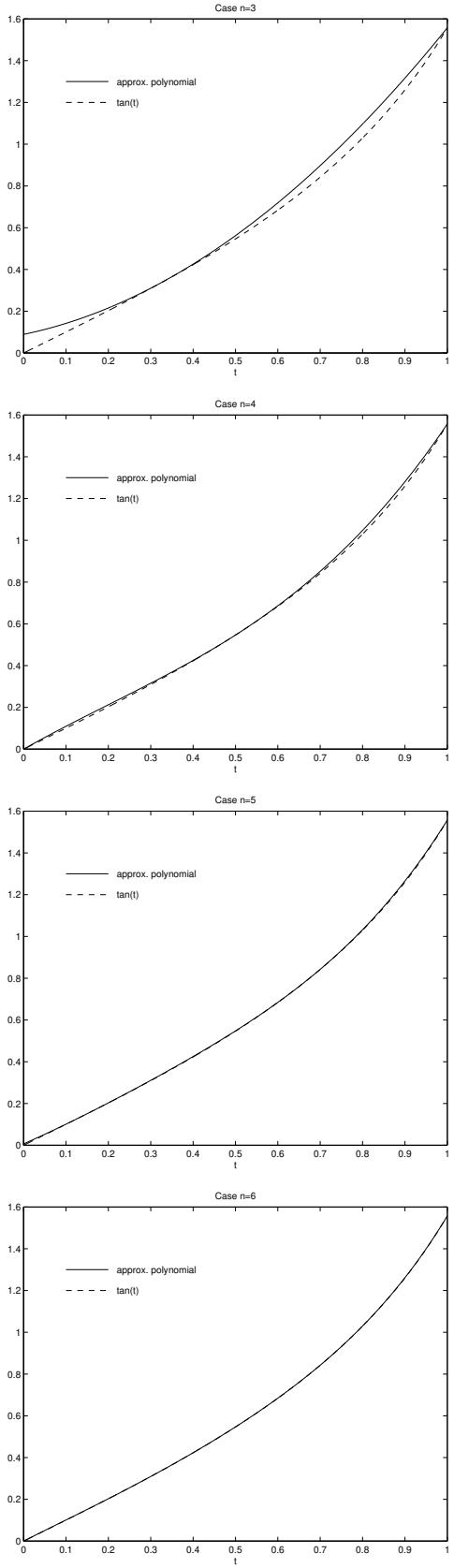

図 1: 近似多項式