

可制御性スコアの数理と連続最適化

佐藤一宏

東京大学大学院情報理工学系研究科

Email: kazuhiro@mist.i.u-tokyo.ac.jp



佐藤一宏（東京大学大学院情報理工学系研究科）

専門：システム制御理論

システム制御の問題を様々な数理を用いて解決することや、
システム制御理論の異分野への応用に特に興味があります

主要研究テーマ：可制御性スコア

意思決定のための粗いモデル（ネットワークシステム）を用いて、
可制御性の観点からどこにどの程度の強さで介入したら良いかという
意思決定のための情報を与える概念（凸最適化問題の一意解）



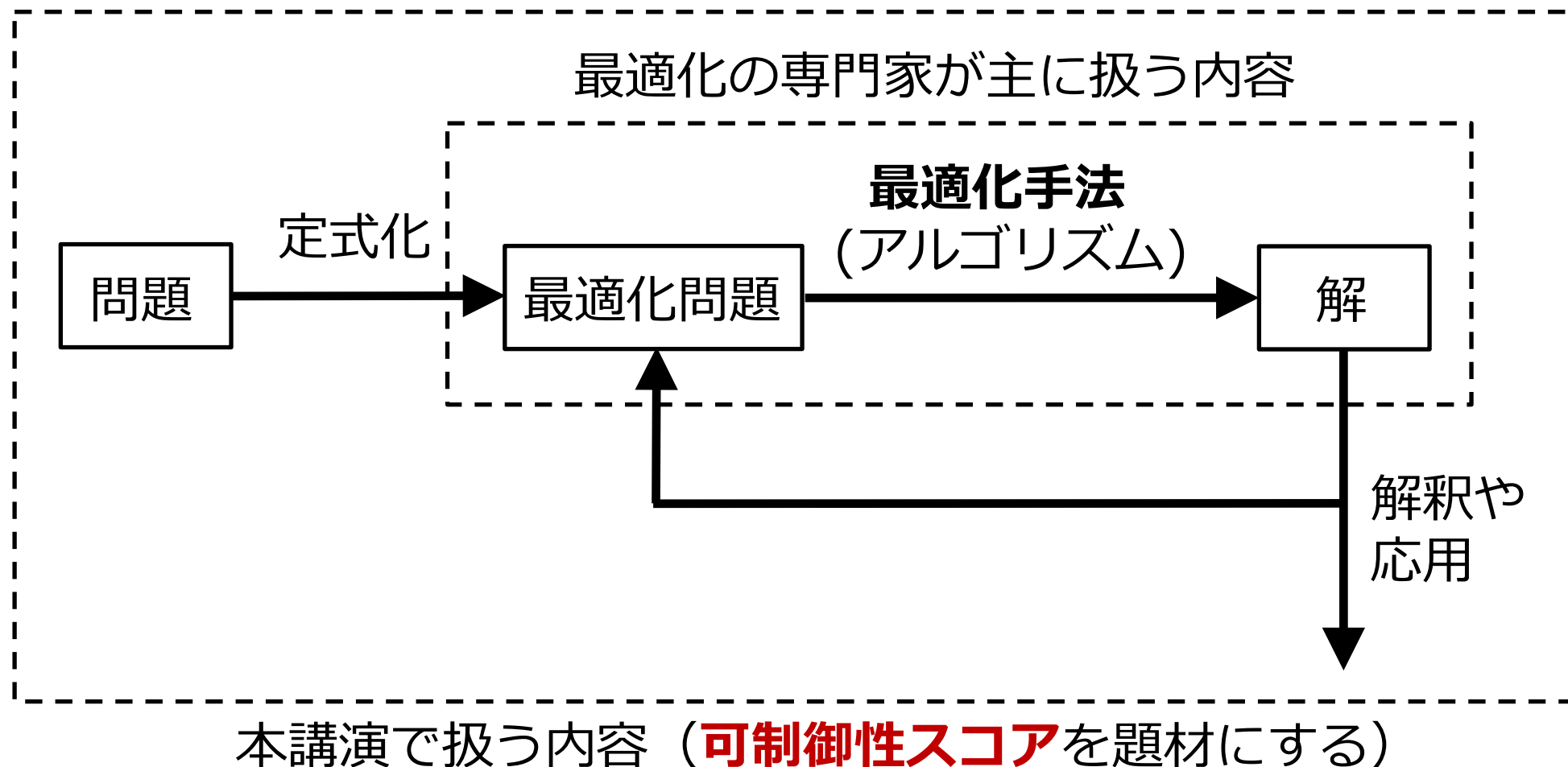
未来数理科学

Mathematical Sciences for the Future

可制御性スコアに基づくシステム介入と変革点検知
(2025年10月研究開始)

「**可制御性スコア**理論に基づくネットワークシステム制御理論の展開」により、
2026年計測自動制御学会制御部門**パイオニア**賞受賞

本講演で扱う内容



※演習は最適化の内容にしています

本講演の構成

第一部：可制御性スコアとは

可制御性の定量評価から**可制御性スコア**を導入し、
定式化・意味・応用・既存指標との違いを説明する

第二部：可制御性スコアリング問題のアルゴリズムおよび一意性解析

可制御性スコアリング問題を一般化した
開集合を定義域にもつ凸最適化問題の**アルゴリズム**を紹介し、
可制御性スコアの**一意性**解析を説明する

第三部： $T \rightarrow \infty$ での議論

無限時間での可制御性スコアリング問題を定式化し、
エピソードを用いて有限時間の可制御性スコアの極限を解析する

第一部：可制御性スコアとは

- (1) 可制御性スコアの概略
- (2) 可制御性とその定量評価
- (3) 可制御性スコアの詳細
- (4) 可制御性スコアと既存指標との比較

Sato, Terasaki: **Controllability scores** for selecting control nodes of large-scale network systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 2024

Sato, Kawamura: Uniqueness Analysis of **Controllability Scores** and Their Application to Brain Networks, IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2025

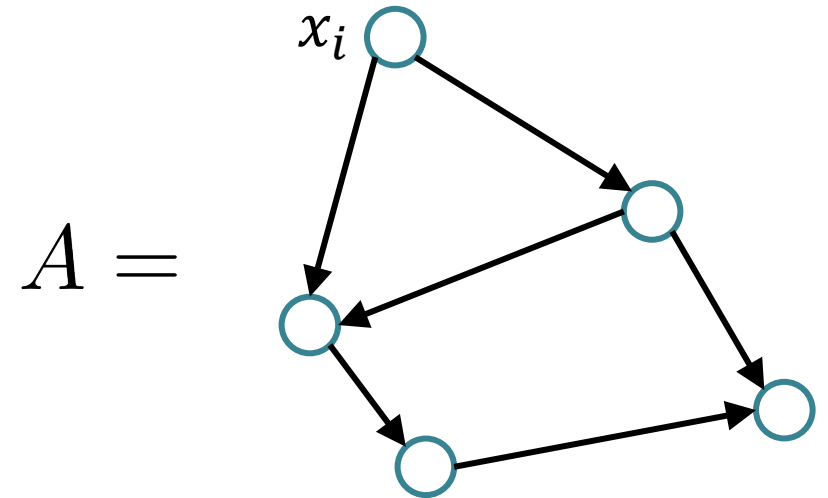
Sato: Relationship Between **Controllability Scoring** and Optimal Experimental Design, The 15th Asian Control Conference, 2026

可制御性スコアで利用する数理モデル

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

よくある見方：非線形システムの平衡点周りでの近似モデル

本研究での見方：介入点・介入強度を決定する（意思決定する）ためのモデル



可制御性スコアの直感的イメージ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \text{diag}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})u(t)$$

maximize 可制御性の大きさ

subject to $p \in \Delta := \left\{ (p_i) \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ 0 \leq p_i \end{array} \right\}$

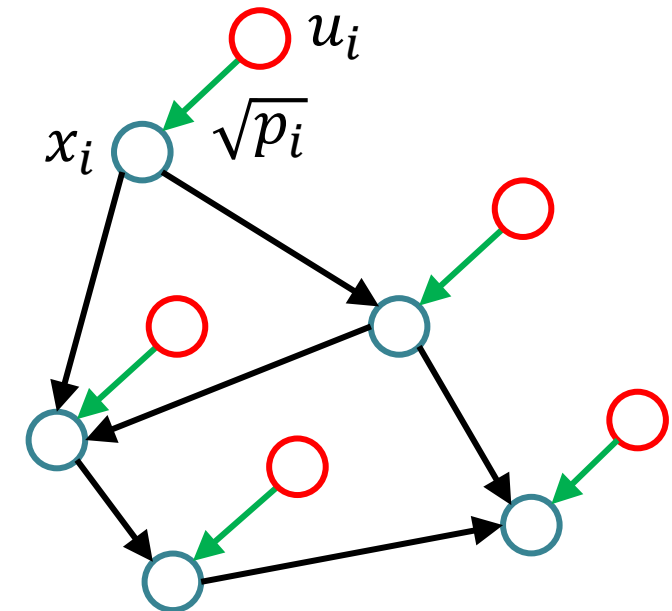
重要度を分配する制約

最適解の成分 p_i^* を x_i の可制御性に関する重要度と解釈

➡ p_i^* を x_i の可制御性スコアという (大きければ大きいほど重要)

Sato, Terasaki: **Controllability scores** for selecting control nodes of large-scale network systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 2024

状態ノードと入力ノード
が1対1対応



可制御性

★ $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 状態 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 入力
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

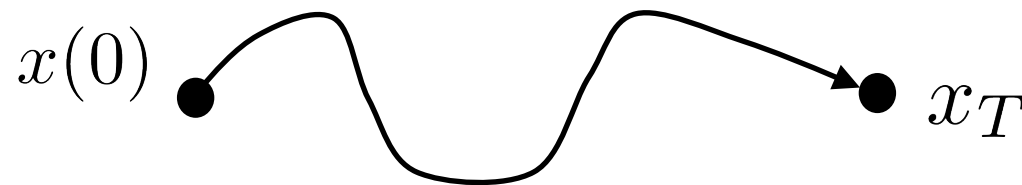
$$x(t) = \exp(At)x(0) + \Psi_t u$$

入力と関係する項

$$\Psi_t u := \int_0^t \exp(A(t-\tau))Bu(\tau)d\tau$$

$\Psi_t : L^2[0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ は有界線形作用素

★ は可制御 : $\Leftrightarrow$ 任意の $x(0), x_T$ と任意の $T > 0$ に対して,
ある入力 $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ が存在して $x(T) = x_T$ を満たす



$$\Leftrightarrow \text{Im } \Psi_t = \mathbb{R}^n$$

Ψ_t は全射

$$\text{Im } \Psi_t = \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow W(t) := \Psi_t \Psi_t^* \succ O$$

可制御性グラミアン

$$\Psi_t^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2[0, t]$$

は Ψ_t の随伴（共役）作用素

$$\begin{aligned} \langle \Psi_t^*(\xi), \eta \rangle_{L^2[0, t]} &= \langle \xi, \Psi_t(\eta) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \xi^\top \int_0^t \exp(A(t - \tau)) B \eta(\tau) d\tau = \int_0^t (B^\top \exp(A^\top(t - \tau)) \xi)^\top \eta(\tau) d\tau \\ &= \langle B^\top \exp(A^\top(t - \tau)) \xi, \eta \rangle_{L^2[0, t]} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \Psi_t^*(\xi) = B^\top \exp(A^\top(t - \tau)) \xi$$

$$\begin{aligned} (\Psi_t \Psi_t^*)(\xi) &= \Psi_t(\Psi_t^*(\xi)) = \int_0^t \exp(A(t - \tau)) B (\Psi_t^*(\xi)) d\tau \\ &= \int_0^t \exp(A(t - \tau)) B B^\top \exp(A^\top(t - \tau)) d\tau \xi \\ &\quad W(t) \end{aligned}$$

通常の線形代数 $\mathbb{R}^m$

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$AA^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\|u\|^2 \leq 1$$

$$\{Au \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|^2 \leq 1\}$$

|| A は全射と仮定

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top (AA^\top)^{-1}x \leq 1\}$$

$\min_{Au=b} \|u\|^2$ の最適解は

$$u = A^\top (AA^\top)^{-1}b$$

システム制御で出てくる問題 $L^2[0, t]$

$$\Psi_t : L^2[0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Psi_t^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2[0, t]$$

$$W(t) = \Psi_t \Psi_t^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\|u\|_{L^2[0, t]}^2 = \int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq 1$$

$$\{\Psi_t u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|_{L^2[0, t]}^2 \leq 1\}$$

|| Ψ_t は全射と仮定 (**可制御**と仮定)

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top (\Psi_t \Psi_t^*)^{-1}x \leq 1\}$$

?

エネルギー最小化問題に関する可制御性定量評価

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{可制御}$$

$$\Psi_t u := \int_0^t \exp(A(t - \tau)) Bu(\tau) d\tau$$

$$\text{minimize} \quad \|u\|_{L^2[0,t]}^2 = \int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\text{subject to} \quad \Psi_t u = x_f \quad u \in L^2[0,t]$$

$$u_{\text{opt}} = \Psi_t^* W(t)^{-1} x_f \text{ が最適解}$$

$$\|u_{\text{opt}}\|_{L^2[0,t]}^2 = x_f^\top W^{-1}(t) x_f$$

x_f へ時刻 t で到達させるのに必要な
最小入力エネルギー

$x_f^\top W(t)^{-1} x_f$ の x_f に関する期待値を単位球面上の一様分布に関してとる

$$\propto \text{tr}(W(t)^{-1}) \quad \text{小さいほど可制御性が高い}$$

可到達集合の体積に関する可制御性定量評価

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{可制御}$$

$$\Psi_t u := \int_0^t \exp(A(t - \tau)) Bu(\tau) d\tau$$

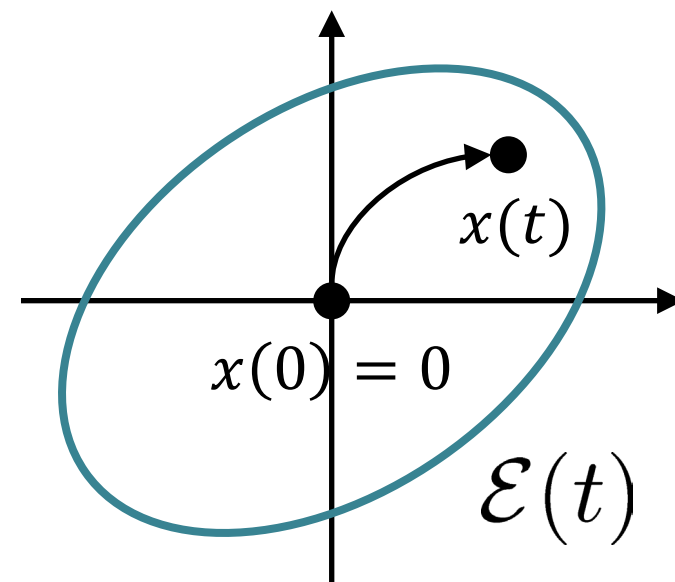
$$\left\{ \Psi_t u \mid \|u\|_{L^2[0,t]}^2 \leq 1 \right\} \quad \text{入力エネルギー1以下で時刻} t \text{で到達可能な状態の集合}$$

$$\| W(t) \succ O$$

$$\mathcal{E}(t) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top W(t)^{-1} x \leq 1\} \quad \text{楕円体}$$

$$\mathcal{E}(t) \text{の体積} = \det W^{1/2}(t) \times (\text{n次元単位球の体積})$$

$$\det W(t) \quad \text{大きいほど可制御性が大きい}$$

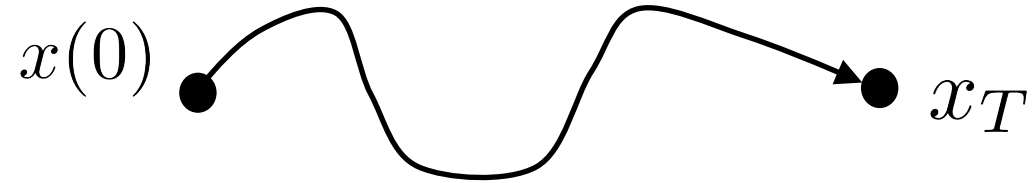


可制御性の大きさを表現する関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(p)u(t) \quad \star \quad B(p) = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$$

★ は可制御 : $\Leftrightarrow$ 任意の $x(0)$, x_T と任意の $T > 0$ に対して,
ある入力 $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ が存在して $x(T) = x_T$ を満たす

$$\Leftrightarrow W(p, T) \succ O$$



$$W(p, T) = \int_0^T \exp(At) B(p) B(p)^\top \exp(A^\top t) dt \quad \text{可制御性グラミアン}$$

$\det W(p, T) \approx$ 可到達な状態の集合（楕円体）の**体積**

$\text{tr}(W(p, T)^{-1}) \approx$ 原点から単位球面上に到達させるために必要な**最小入力エネルギーの平均**

$\det W(p, T)$ と $\text{tr}(W(p, T)^{-1})$ は**可制御性の大きさ**を表現していると思える

Muller and Weber: Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamical Systems, Automatica, 1972

VCSとAECS

minimize $f_T(p)$ or $g_T(p)$ $T > 0$ given

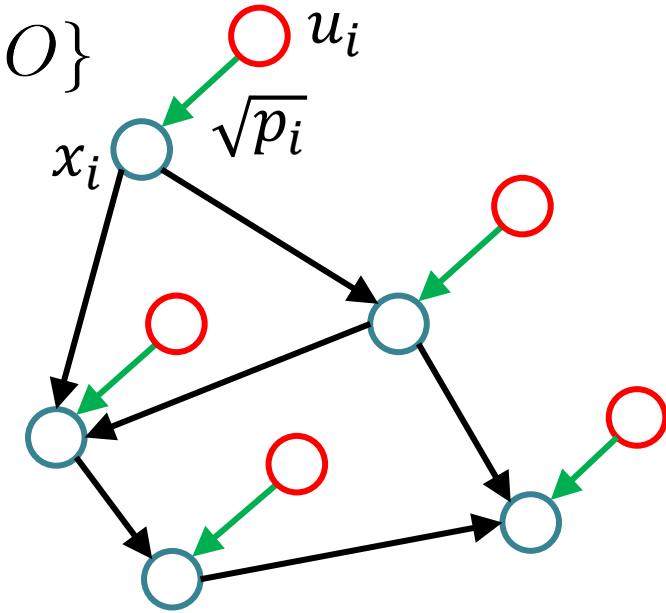
subject to $p \in X_T \cap \Delta_n$ $X_T := \{p \in \mathbb{R}^n \mid W(p, T) \succ O\}$

$$f_T(p) := -\log \det W(p, T)$$

➡ 最適解 p^* : **Volumetric Controllability Score (VCS)**

$$g_T(p) := \text{tr} (W(p, T)^{-1})$$

➡ 最適解 p^* : **Average Energy Controllability Score (AECS)**



定理

任意のシステム行列 A に対して, ほとんどすべての $T > 0$ で**VCS**と**AECS**は一意である

➡ **VCS**と**AECS**はネットワークシステムの**中心性**として利用可能！

射影勾配法によって生成された点列は**VCS**または**AECS**に収束する (詳しくは**第二部**)

VCS $\det W(p, T) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ より

可制御性グラミアンの固有値の**幾何平均**を最大化している

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1) \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

幾何平均は同じ

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (10, 0.1) \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

➡ **VCS**は動かしにくい方向があっても許容することがある（可到達領域の大きさが大事）

AECS $\text{tr}(W(p, T)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}$ より

可制御性グラミアンの固有値の**調和平均**を最大化している

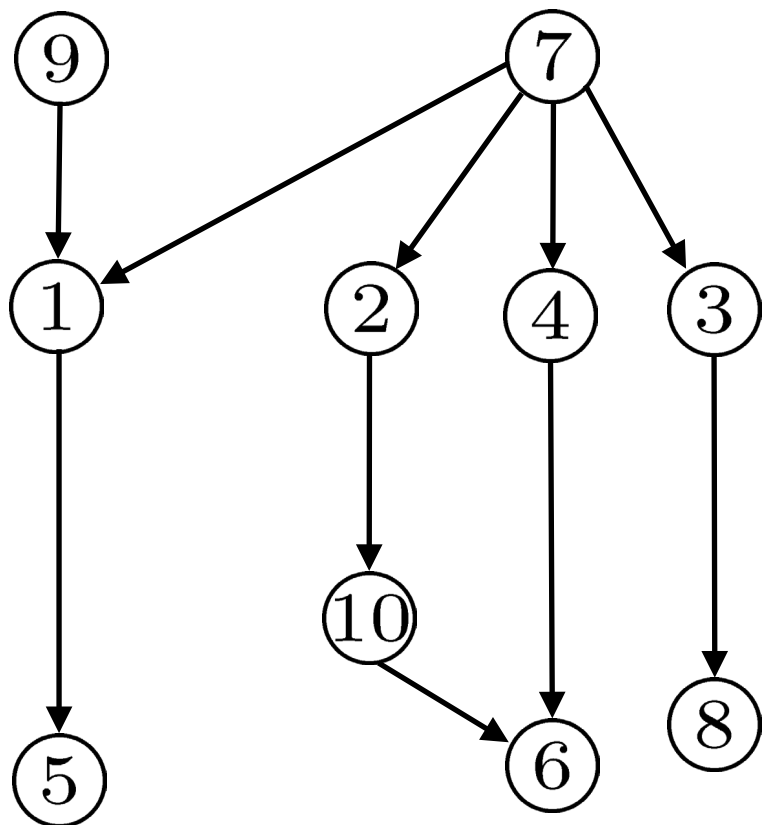
$$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = 2$$

調和平均は小さい固有値の影響を受けやすい

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (10, 0.1) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = 10.1$$

(**AECS**は小さい固有値を嫌う)

➡ **AECS**は動かしにくい方向があることを嫌う（エネルギーが大事）



枝の重みはすべて0.2

ノード	VCS	AECS
1	0.073	0.173
2	0.101	0.114
3	0.109	0.121
4	0.086	0.106
5	0.045	0.092
6	0.061	0.134
7	0.250	0.093
8	0.042	0.069
9	0.167	0.002
10	0.066	0.096

$$T = 10^4$$

$$T \rightarrow \infty$$

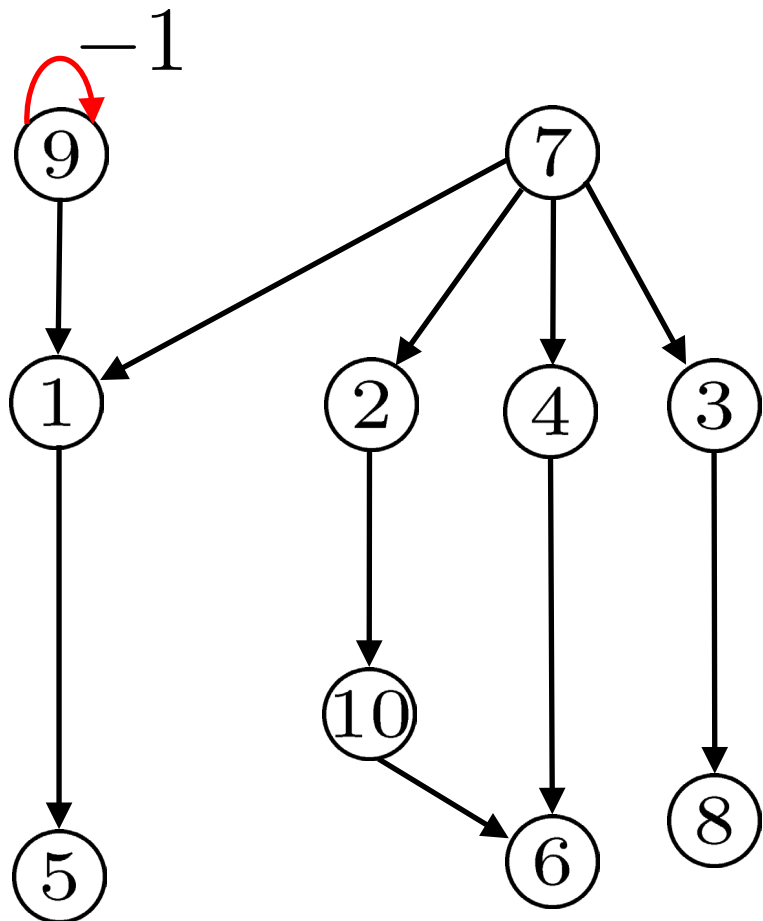
0



AECSを用いたシステムは
不可制御（詳細は**第3部**）

➡ グラフラプラシアン L を作って $A = -L$ と定義

VCSは上流のノードを重要と判定したが、
AECSは全く違う



ノード	VCS	AECS
1	0.097	0.127
2	0.102	0.094
3	0.110	0.100
4	0.087	0.087
5	0.084	0.074
6	0.061	0.111
7	0.249	0.076
8	0.042	0.057
9	0.102	0.195
10	0.066	0.079

$$T = 10^4$$

負の自己ループがあるか否かで可制御性スコアは大きく変わらうる

AECSの目的関数 $\text{tr}(W(p, T)^{-1}) \geq \frac{1}{p_i \omega_i(T)}$ $\omega_i(T) = \begin{cases} T & (\ell_i = 0) \\ \frac{e^{2\ell_i T} - 1}{2\ell_i} & (\ell_i \neq 0) \end{cases}$

既存指標との比較

可制御性スコアリングの枠組み

- 状態ノードと入力ノードが**1:1**に対応

➡ **可制御性グラミアン**の数値的不安定性を回避しやすい

- **可制御性スコア** = 最適解
(単一入力ごとの**可制御性尺度**ではない)

従来型の枠組み

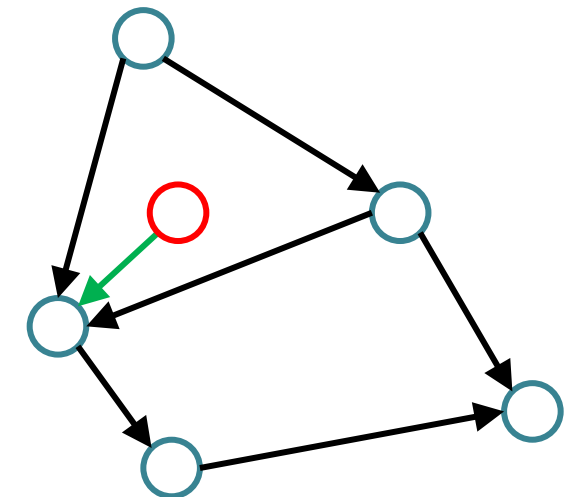
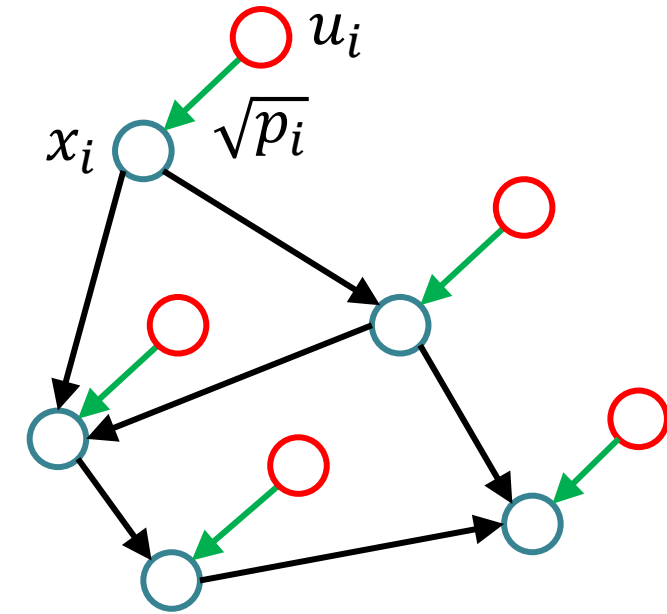
- 各ノードに単一入力を個別に印加し,
可制御性グラミアンに基づく**可制御性尺度**を評価

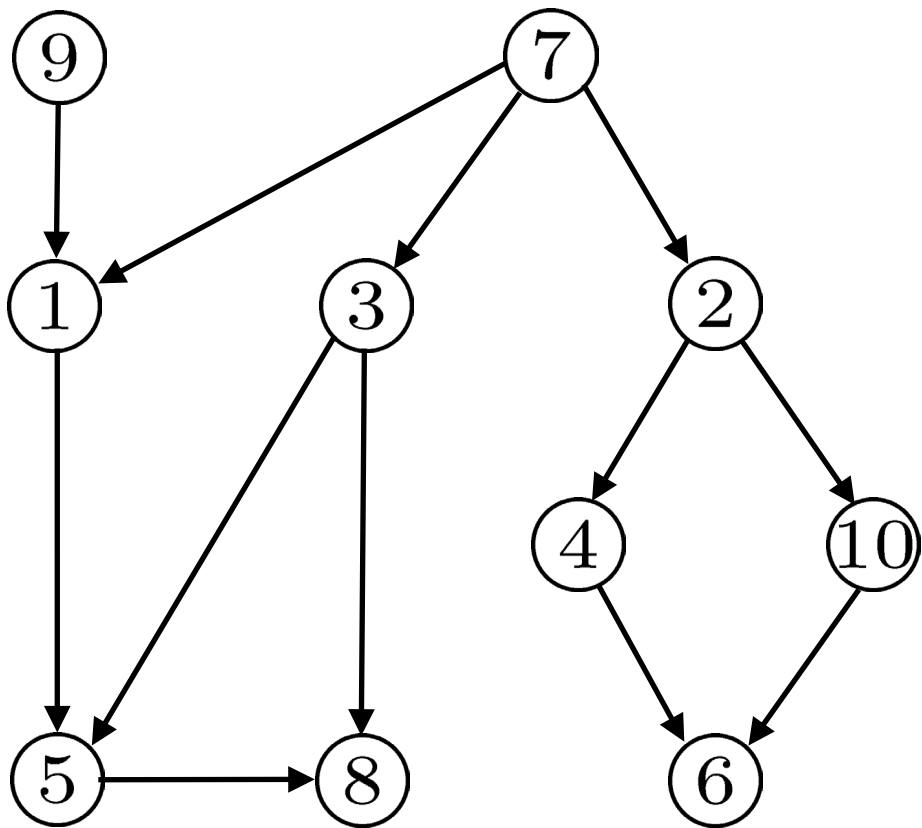
T. H. Summers, F. L. Cortesi and J. Lygeros: On submodularity and controllability in complex dynamical networks, IEEE Trans. on Control of Network Systems, 2016

➡ **可制御性グラミアン**は数値的に不安定になりやすい

Baggio and Zampieri: Controllability of large-scale networks:

The control energy exponents, IEEE Trans. on Control of Network Systems, 2024





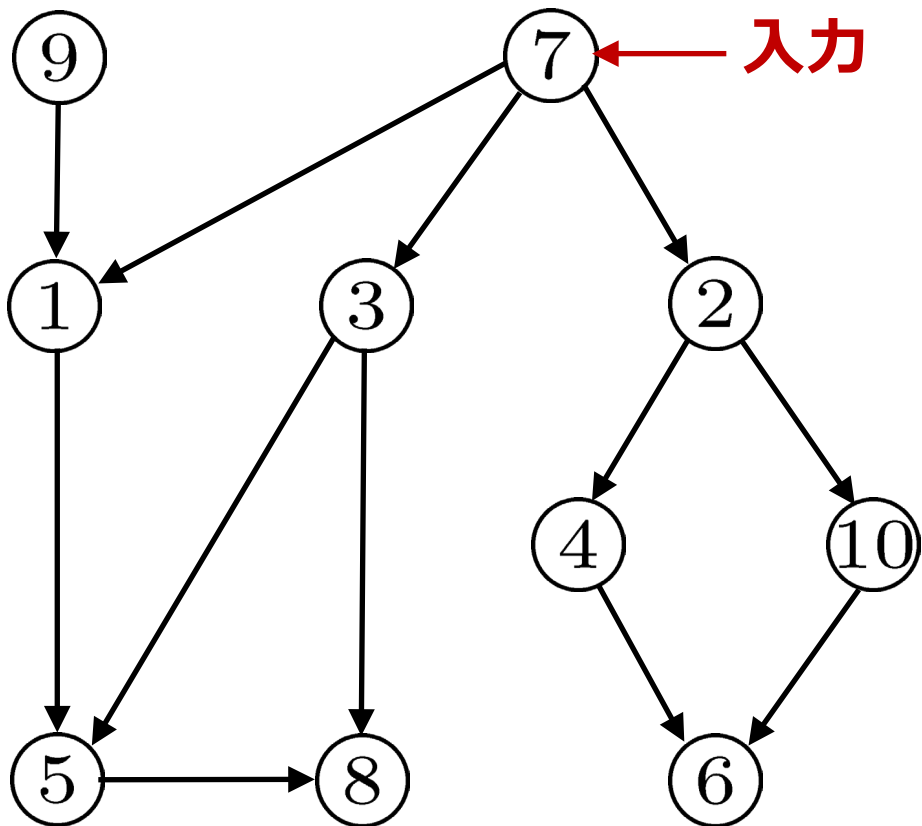
安定で階層的なネットワーク

W_i ノードiのみに入力を印加した場合の可制御性グラミアン

$$\mathbf{VCE}(\mathbf{i}) = \sum_{j=1}^{k_i} \log \lambda_j(W_i) (\approx \log \det W_i)$$

$$\mathbf{ACE}(\mathbf{i}) = - \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{\lambda_j(W_i)} (\approx -\text{tr}(W_i^{-1}))$$

ノード	VCS	AECS	VCE	ACE
1	0.000	0.000	16.77	-0.227
2	0.206	0.256	23.86	-2.964
3	0.000	0.000	20.60	-0.181
4	0.000	0.000	11.04	-0.114
5	0.000	0.000	7.789	-0.132
6	0.000	0.000	2.933	-0.053
7	0.385	0.249	-7.731	-1.449×10^{11}
8	0.000	0.000	3.0924	-0.045
9	0.345	0.312	36.43	-0.265
10	0.064	0.183	10.21	-0.150



安定で階層的なネットワーク

W_7 ノード7のみに入力を印加した場合の可制御性グラミアン

$$\text{rank } W_7 = 9$$

$$\lambda_1(W_7) \geq \cdots \geq \underbrace{\lambda_8(W_7) \geq \lambda_9(W_7)}_{\approx 0 \text{ 小さすぎる!}} > 0$$



W_7 は数値的に不安定

$$\text{VCE}(7) = \sum_{j=1}^9 \log \lambda_j(W_7)$$

$$= \log \lambda_1(W_7) + \cdots + \underbrace{\log \lambda_8(W_7) + \log \lambda_9(W_7)}_{< 0}$$

$$= -7.731$$

$$\text{ACE}(7) = -\sum_{j=1}^9 \frac{1}{\lambda_j(W_i)} = -1.449 \times 10^{11}$$

VCE/ACEでは⑦は最も重要性が低いと評価されるが、これは直感に反する

最適実験計画（パラメータ推定のための実験頻度の決定問題）との類似性

$y_i = f(x_i)^\top \theta + \varepsilon_i$ $y_i \in \mathbb{R}$ 観測値 $x_i \in \mathbb{R}$ 実験値
 $\theta \in \mathbb{R}^d$ 推定したいパラメータ $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ iid $i = 1, \dots, N$

Fisher情報行列 = θ の最小二乗推定量の共分散行列の逆行列

$$= \frac{N}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{n_i}{N}}_{w_i} \underbrace{f(x_i) f(x_i)^\top}_{M_i}$$

 m 実験の種類数
 $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$
 w_i 実験 i の頻度

【最適実験計画】 気持ち： M が大きいほど推定精度の高い実験 (w_i を連続値に近似)

minimize $-\log \det M(w)$
subject to $w \in \Delta_m$

minimize $\text{tr}(M(w)^{-1})$
subject to $w \in \Delta_m$

$M(w) := \sum_{i=1}^m w_i M_i$

D-最適 = 誤差楕円体の体積最小化
VCSと同じ形式の最適化問題

A-最適 = 各パラメータの分散の合計を最小化
AECSと同じ形式の最適化問題

最適実験計画と可制御性スコアリングの相違点

【最適実験計画】

$$M(w) := \sum_{i=1}^m w_i M_i \quad M_i \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (\text{対称}) \quad \begin{array}{l} m \text{ 実験の種類数} \\ d \text{ 推定したいパラメータ数} \end{array}$$

の m が $d(d+1)/2$ より大きいことがよくあり, M_i が線形独立でないことが多い

⇒ 最適解（実験の比率ベクトル）が一意でないことが多い

R. Harman, L. Filova and S. Rosa: The polytope of optimal approximate designs: extending the selection of informative experiments, Statistics and Computing, 2024

【可制御性スコアリング】

$$W(p, T) = \sum_{i=1}^n p_i W_i(T) \quad W_i(T) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{対称}) \quad n \text{ 状態の次元}$$

の n は $n(n+1)/2$ より小さく, ほとんどすべての $T > 0$ で $W_i(T)$ の線形独立性が保証可能で, これによって**可制御性スコアの一意性（中心性として利用するために重要）**が保証できる

可制御性スコアリングの枠組み

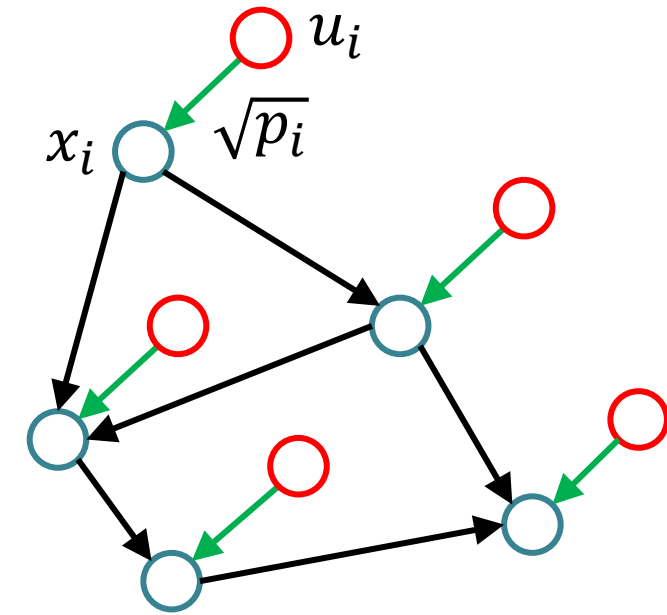
- 状態ノードと入力ノードが**1:1**に対応

➡ 可制御性グラミアンの数値的不安定性を回避

- 可制御性スコア = 最適解

- 最適化問題の構造は**OED**と同様だが、
最適解の一意性が保証できることが最重要（中心性として利用するため）

時間パラメータやネットワーク構造がスコアに与える影響を調べることも重要なテーマ（**OED**にはないテーマ）



第二部：最適解の一意性

第三部：時間パラメータの影響

第一部のまとめ

- **可制御性スコア**は可制御性の観点から**介入点・介入強度**を決定する

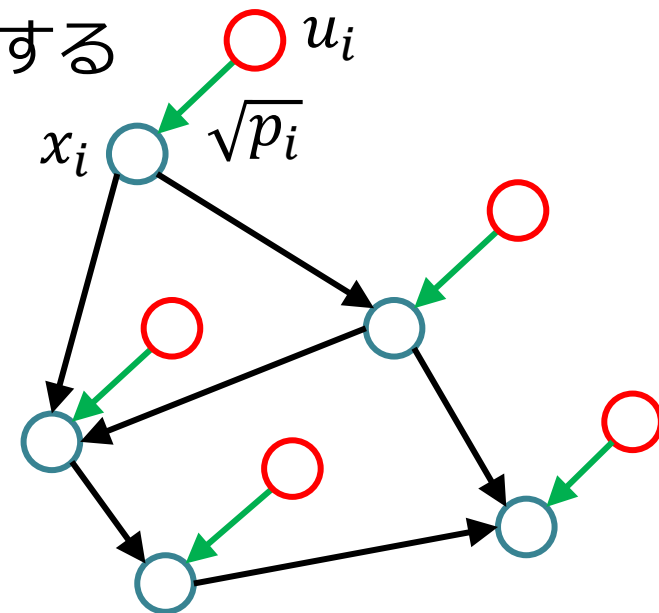
※高精度な予測や制御ではなく意思決定が目的なので、
介入判断に必要な構造を捉えた粗いモデルを利用可能

- **VCS**と**AECS**はそれぞれ可制御性グラミアンの固有値の**幾何平均**と**調和平均**と関係し、重視するものが異なる

- **可制御性スコア**のアプローチは1入力ベースの既存の中心性指標の問題点を克服する

- **可制御性スコアリング**と**最適実験計画**の最適化問題の構造は同様だが、相違も多い

※**可制御性スコア**を計算するためのソースコードを公開してます



<https://github.com/Sato-Sakigake-Controllability-Score/controllability-score>

第二部：可制御性スコアリング問題の アルゴリズムおよび一意性解析

- (1) **可制御性スコアリング**問題を一般化した凸最適化問題
- (2) その凸最適化問題を解くための**射影勾配法**の変種
- (3) **線形収束**するための条件
- (4) **可制御性スコア**の一意性解析

K. Sato: Projected-Gradient Analysis for Open-Domain Convex Optimization under
Boundary Blow-Up: Application to Controllability Scoring,
<https://arxiv.org/pdf/2607.23674>

可制御性スコアの最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_T(p) \text{ or } g_T(p) \\ \text{subject to} & p \in X_T \cap \Delta_n \end{array} \quad \begin{array}{l} T > 0 \text{ given} \\ X_T := \{p \in \mathbb{R}^n \mid W(p, T) \succ O\} \end{array}$$

$$f_T(p) := -\log \det W(p, T) \quad g_T(p) := \text{tr} (W(p, T)^{-1})$$

Δ_n は射影が計算しやすい**凸なコンパクト集合**

X_T は目的関数の定義域になっていて**凸な開集合**

$\forall \{p^{(k)}\} \subset X_T \cap \Delta_n$ に対して

$$\text{dist}(p^{(k)}, X_T^c) \rightarrow 0 \implies \begin{cases} f_T(p^{(k)}) \rightarrow \infty \\ g_T(p^{(k)}) \rightarrow \infty \end{cases}$$

**目的関数値は
定義域の境界に近づくと発散する**

一般化した最適化問題

minimize $f(p)$

subject to $p \in C \cap U$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2回微分可能な凸関数

C は射影が計算しやすい凸なコンパクト集合

U は f の定義域になっていて凸な開集合

境界発散条件

$\forall \{p^{(k)}\} \subset C \cap U$ に対して

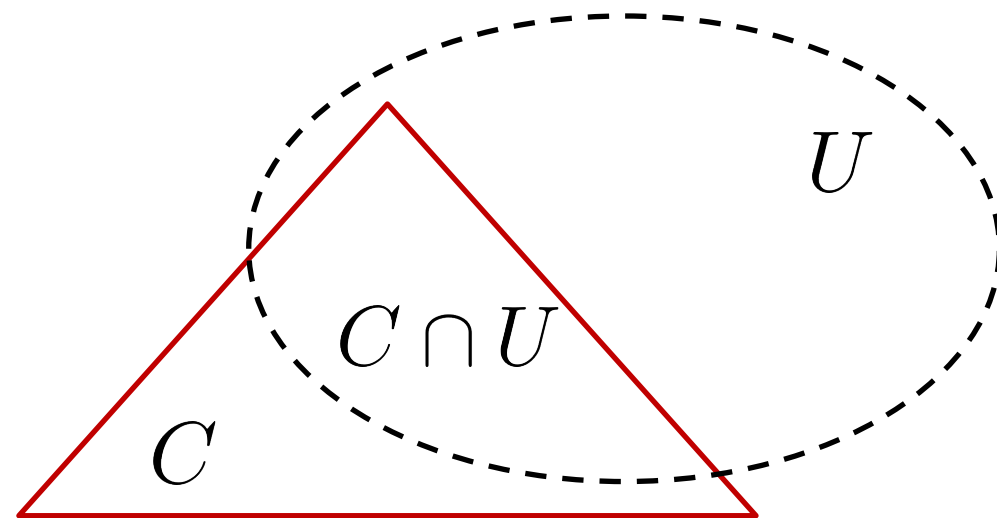
$\text{dist}(p^{(k)}, U^c) \rightarrow 0 \Rightarrow f(p^{(k)}) \rightarrow \infty$

$C \cap U$ は凸だが、閉とは限らない

→ $C \cap U$ への射影を利用した射影勾配法は一般には利用不可

疑問 1 : 最適解は存在するのか？

疑問 2 : 最適解が存在するとしたら、どんなアルゴリズムが有効か？



$$\mathcal{F}^{(0)} := \left\{ p \in C \cap U \mid f(p) \leq f(p^{(0)}) \right\} \quad \left(p^{(0)} \in C \cup U \right)$$

f は凸関数で C と U は凸集合なので $\mathcal{F}^{(0)}$ は**凸集合**

境界発散条件から $\mathcal{F}^{(0)}$ は**コンパクト集合**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(p) \\ \text{subject to} & p \in C \cap U \end{array}$$

の最適解と

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(p) \\ \text{subject to} & p \in \mathcal{F}^{(0)} \end{array}$$

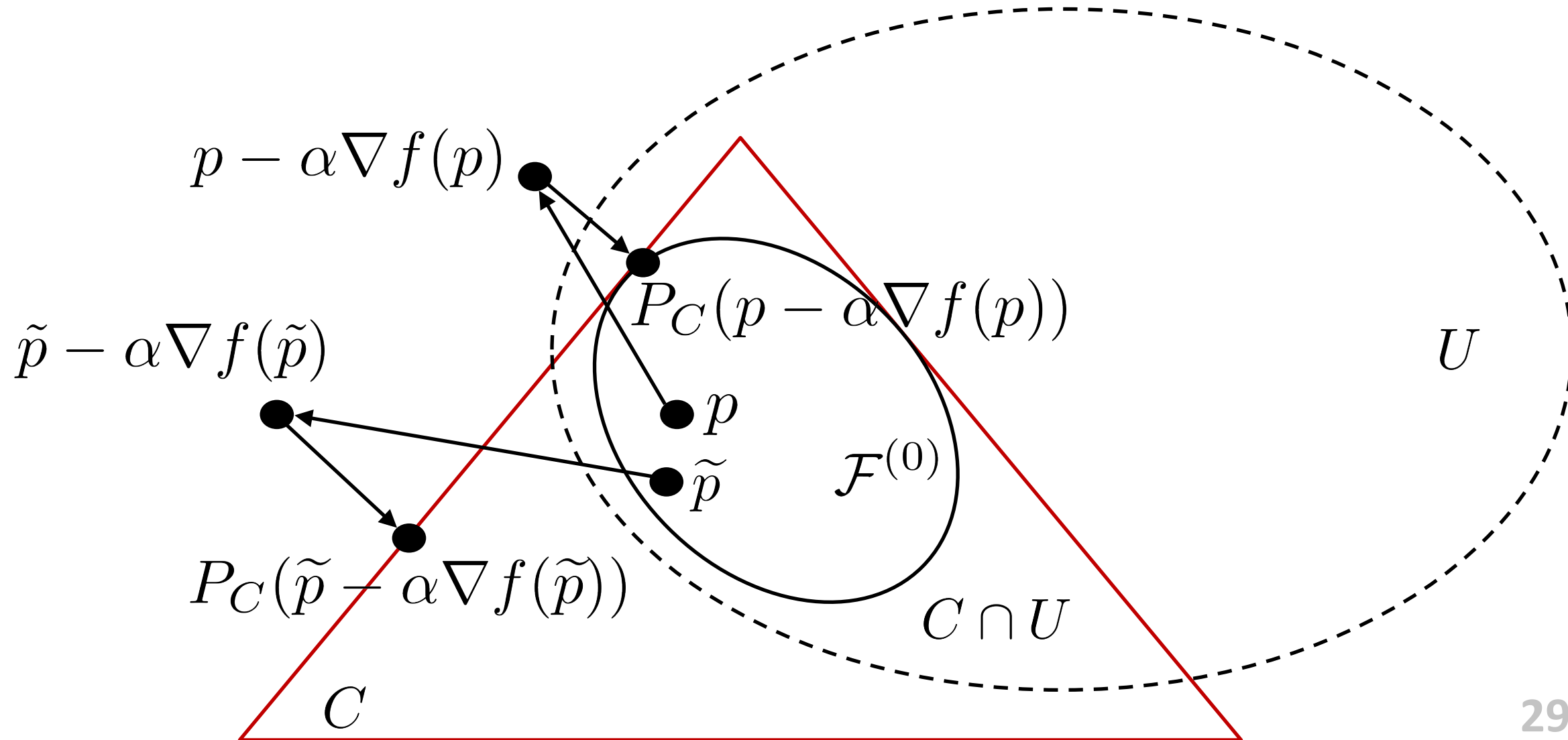
の最適解は同じ（適した解法アルゴリズムは異なる）

コンパクト集合 $\mathcal{F}^{(0)}$ 上の連続関数 f の最小化問題なので**最適解は存在（疑問1は解決）**

しかし, $\mathcal{F}^{(0)}$ 上への射影の計算は効率的とは限らないため避けたい

C 上への射影を利用した射影勾配法

$P_C(p - \alpha \nabla f(p)) \in U$ となるか？



$q := P_C(p - \alpha \nabla f(p)) \in U$ となる条件を考察する

$\alpha > 0$ が

$f(q) \leq f(p) + \sigma \nabla f(p)^\top (q - p)$ **アルミホ条件** を満たしていたら

$\nabla f(p)^\top (q - p) \leq -\alpha^{-1} \|q - p\|^2$ より $f(q) \leq f(p)$

(演習問題)

よって $p \in \mathcal{F}^{(0)} \Rightarrow q \in \mathcal{F}^{(0)} \subset U$

最初は大きめに $\alpha > 0$ を設定しておいて,
アルミホ条件を満たすまで α を小さくしていく **バックトラッキング** の利用が有効そう

入力 : $p^{(0)} \in C \cap U$, $\bar{\alpha} > 0$, $\sigma, \rho \in (0, 1)$, $\varepsilon \geq 0$

(0) $k = 0$

(1) $\alpha := \bar{\alpha} > 0$

バックトラッキング (有限回で終了する)

(2) $q := P_C(p^{(k)} - \alpha \nabla f(p^{(k)}))$

(3) $q \notin U$ ならば(4)へ進み, $q \in U$ ならば

$$f(q) \leq f(p^{(k)}) + \sigma \nabla f(p^{(k)})^\top (q - p^{(k)}) \quad \text{アルミホ条件}$$

をチェックして成り立つならば $\alpha_k := \alpha$, $p^{(k+1)} := q$ として(5)へ

(4) $\alpha \leftarrow \rho \alpha$ として(2)へ

(5) $\|p^{(k+1)} - p^{(k)}\| / \alpha_k \leq \varepsilon$ ならば $p^{(k)}$ を出力する (理由は**演習問題**)

(6) $k \leftarrow k + 1$ として(1)へ

定理 ある $r > 0$, $G > 0$, $L > 0$ が存在して以下が成り立つ :

$$\mathcal{K}_r := \left\{ q \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(q, \mathcal{F}^{(0)}) \leq r \right\} \subset U$$

$$\|\nabla f(p)\| \leq G \quad \left(\forall p \in \mathcal{F}^{(0)} \right) \quad \|\nabla^2 f(q)\|_2 \leq L \quad (\forall q \in \mathcal{K}_r)$$

さらに $\alpha_\star := \min \left\{ \frac{r}{G}, \frac{2(1-\sigma)}{L} \right\}$ とすると,

任意の $p \in \mathcal{F}^{(0)}$ と $0 < \alpha \leq \alpha_\star$ に対して

$$q := P_C(p - \alpha \nabla f(p)) \in \mathcal{K}_r \subset U \quad \left(\text{from } \alpha \leq \frac{r}{G} \right)$$

$$f(q) \leq f(p) + \sigma \nabla f(p)^\top (q - p) \quad \left(\text{from } \alpha \leq \frac{2(1-\sigma)}{L} \right)$$

であり,

$$\underline{\alpha} \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}, \quad \underline{\alpha} := \min\{\bar{\alpha}, \rho \alpha_\star\} > 0$$

曲率条件

$$\mathcal{L}_C := \text{lin}(C - C) \supset C - C$$

任意の $p \in \mathcal{F}^{(0)}$, $v \in \mathcal{L}_C \setminus \{0\}$ に対して $v^\top \nabla^2 f(p) v > 0$

$$\Rightarrow \exists \mu > 0 \quad \text{s.t.} \quad v^\top \nabla^2 f(p) v \geq \mu \|v\|^2$$

$p, q \in \mathcal{F}^{(0)}$, $v := q - p \in \mathcal{L}_C$ とすると

$$f(q) = f(p) + \nabla f(p)^\top v + \int_0^1 (1-t) v^\top \nabla^2 f(p + tv) v \, dt \quad \text{テイラーの積分公式}$$

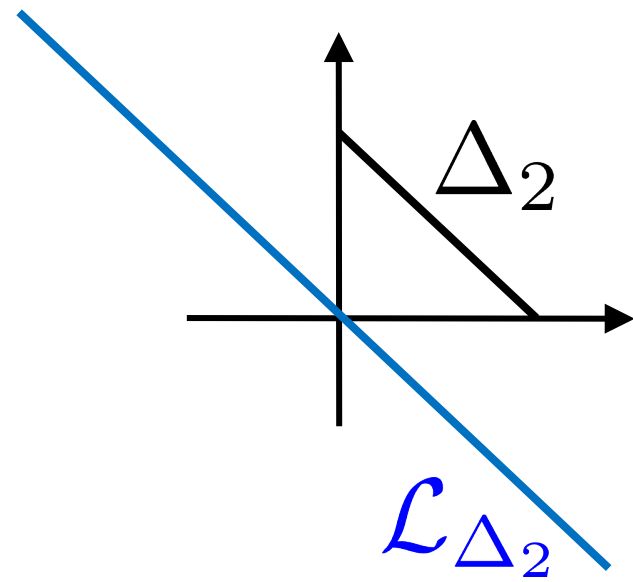
$$\geq f(p) + \nabla f(p)^\top (q - p) + \frac{\mu}{2} \|q - p\|^2 \Rightarrow f \text{ は } \mathcal{F}^{(0)} \text{ 上で強凸}$$

これよりアルゴリズムによって生成された点列 $\{p^{(k)}\}$ は最適解 p^* に線形収束する：

$$\|p^{(k)} - p^*\| \leq \sqrt{\frac{2(f(p^{(0)}) - f(p^*))}{\mu}} \gamma^{k/2}$$

$$\gamma := 1 - \sigma \min\{1, \mu \underline{\alpha}\} \in (0, 1)$$

$\underline{\alpha}$: ステップサイズの下限



先行研究と本研究のアルゴリズムの比較

	開領域	定義域確認	主な仮定	ステップ サイズ下限	線形収束
Songsiri– Vandenberghe, 2010	✓	✓	$\mathcal{F}^{(0)}$ の コンパクト性	–	–
Aguiar et al., 2023	–	–	勾配の大域的 Lipschitz 連続性	✓	–
本研究	✓	✓	境界発散条件	✓	✓

境界発散条件を満たす $\Rightarrow \mathcal{F}^{(0)}$ のコンパクト性を満たす

可制御性スコアリング問題は境界発散条件を満たす

※本研究の問題設定では、境界発散条件により反復点を定義域境界から離れたコンパクト集合に局所化でき、そこでLipschitz定数を明示的に求めることなく、バックトラッキングを適用できる

一般化可制御性スコアリング問題

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(p)u(t) \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$B(p) = (\sqrt{p_1}b_1 \quad \sqrt{p_2}b_2 \quad \cdots \quad \sqrt{p_m}b_m)$$

b_i ($i = 1, \dots, m$) : 入力方向の候補

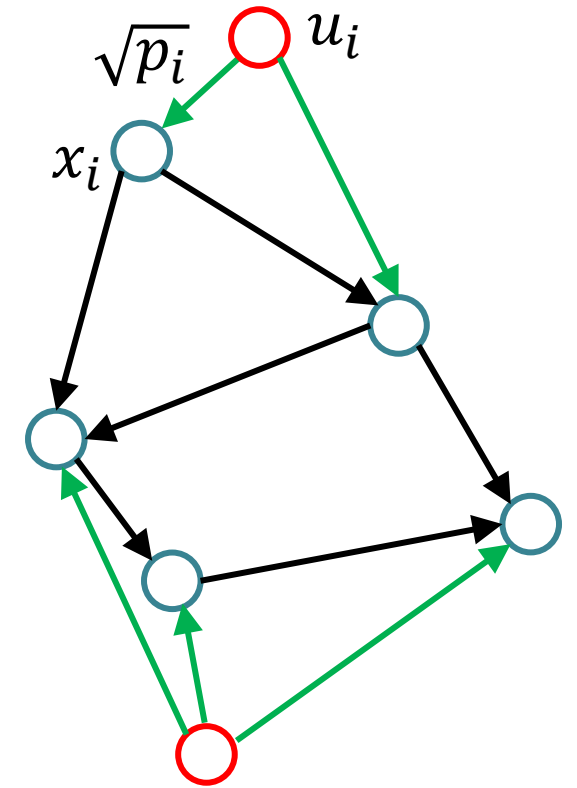
$$p = (p_i) \in C \subset \Delta_m$$

C : コンパクトな凸集合

【通常の可制御性スコアリング問題】

$$m = n \quad b_i = e_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad C = \Delta_n$$

➡ 状態ノードと入力ノードが1対1対応している



状態ノードと入力ノード
が1対1対応していない

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -\log \det W(p, T) \quad \text{or} \quad \text{tr} (W(p, T)^{-1}) \\ \text{subject to} & p \in C \cap X_T \qquad X_T := \{p \in \mathbb{R}^m \mid W(p, T) \succ O\} \end{array}$$

$$W(p, T) = \sum_{i=1}^m p_i W_i(T) \qquad W_i(T) := \int_0^T \exp(At) b_i b_i^\top \exp(A^\top t) dt$$

$$\begin{aligned} C \cap X_T \neq \emptyset &\iff \text{任意の } p^\circ \in \text{ri } C \text{ に対して } p^\circ \in X_T \\ &\iff (A, B_{S_C}) \text{ は可制御} \quad \rightarrow \text{実行可能性は } T \text{ に依らない} \end{aligned}$$

B_{S_C} は $S_C := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid p_i > 0 \text{ for some } p \in C\}$ に対応する
 b_i を並べて構成される行列

一般論からの系 $C \cap X_T \neq \emptyset \implies$ **最適解は存在する**

※一般には状態ノードの**中心性**の意味はなく, 入力方向の候補 b_i の**重要度**を与える

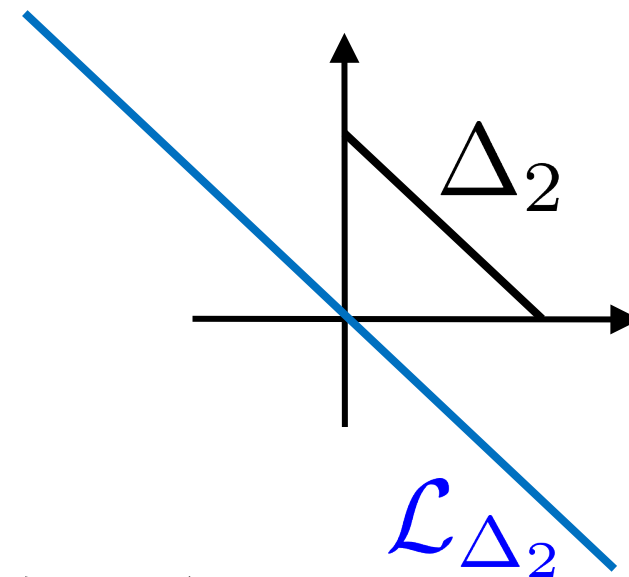
最適解の一意性

$$f(p) := -\log \det W(p, T) \quad \text{or} \quad \text{tr} (W(p, T)^{-1}) \quad p \in \mathcal{F}^{(0)} \subset C \cap X_T$$

任意の $p \in \mathcal{F}^{(0)}$, $v \in \mathcal{L}_C \setminus \{0\}$ に対して $v^\top \nabla^2 f(p) v > 0$ **曲率条件**

$\Rightarrow f$ は $\mathcal{F}^{(0)}$ 上で**強凸** $\Rightarrow$ **最適解は一意**
(一般論より)

$$v^\top \nabla^2 f(p) v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_T(v) := \sum_{i=1}^m v_i W_i(T) = O \quad \text{より,}$$



任意の $v \in \mathcal{L}_C \setminus \{0\}$ に対して $\Phi_T(v) \neq O$ が成立 $\Leftrightarrow$ **曲率条件**が成立



$\Phi_T : \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Sym}(n)$ は $\mathcal{L}_C$ 上で**単射**

$\Phi_T : \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Sym}(n)$ は $\mathcal{L}_C$ 上で単射



$$\Phi_T(v) := \sum_{i=1}^m v_i W_i(T)$$

$\Rightarrow f$ は $\mathcal{F}^{(0)}$ 上で強凸 $\Rightarrow$ 最適解は一意的

例 $C = \Delta_m$ とすると $\mathcal{L}_{\Delta_m} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{1}^\top v = 0\}$ なので

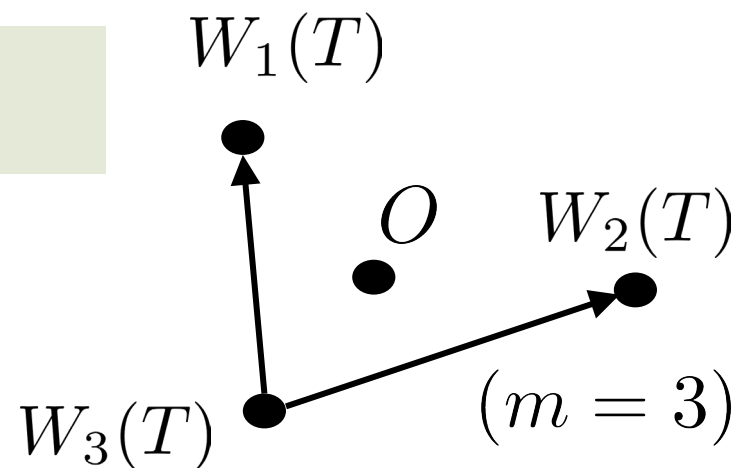
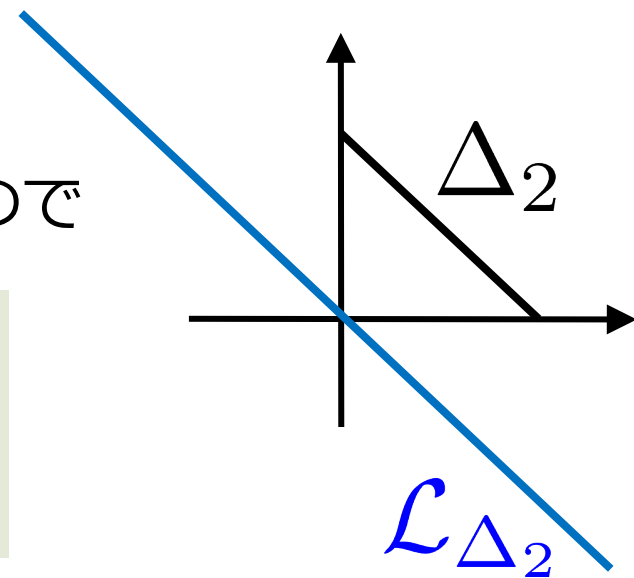


$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m v_i W_i(T) = O \text{ かつ } \sum_{i=1}^m v_i = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\Leftrightarrow W_i(T) - W_m(T) \quad (i = 1, \dots, m-1) \text{ は線形独立}$$

$\Uparrow$

$W_i(T) \quad (i = 1, \dots, m)$ は線形独立



通常の可制御性スコアの一意性

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad m = n \quad b_i = e_i$$

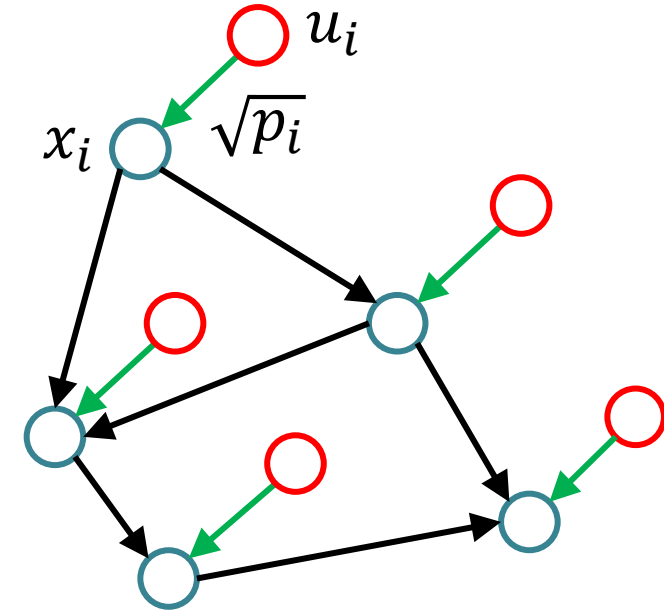
$$\begin{aligned} &\text{minimize} && -\log \det W(p, T) \quad \text{or} \quad \text{tr} (W(p, T)^{-1}) \\ &\text{subject to} && p \in \Delta_n \cap X_T \end{aligned}$$

$$X_T := \{p \in \mathbb{R}^n \mid W(p, T) \succ O\}$$

$$W(p, T) = \sum_{i=1}^n p_i W_i(T) \quad W_i(T) := \int_0^T \exp(At) e_i e_i^\top \exp(A^\top t) dt$$

任意の $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とほとんどすべての $T > 0$ に対して

$W_i(T)$ ($i = 1, \dots, n$) は線形独立となり, **VCS**と**AECS**は一意



K. Sato and R. Kawamura: Uniqueness Analysis of **Controllability Scores** and Their Application to Brain Networks, IEEE Trans. on Control of Network Systems, 2025

証明の概略 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を任意に固定し, ほとんどすべての $T > 0$ で

$$W(x, T) = \sum_{i=1}^n x_i W_i(T) = O \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{を示せば良い}$$

$$(W(x, T))_{ii} = e_i^\top W(x, T) e_i = \sum_{j=1}^n x_j (R(T))_{ij}$$
$$(R(T))_{ij} := \int_0^T P_{ij}(t)^2 dt, \quad P_{ij}(t) := e_i^\top \exp(At) e_j$$

よって $W(x, T) = O \quad \Rightarrow \quad R(T)x = 0$

➡ ほとんどすべての $T > 0$ で $\det R(T) \neq 0$ を示せば良い

➡ $\det R(T)$ は T について**解析的**なので,
 $\det R(T)$ は**恒等的に0ではない**ことを示せば良い

第二部のまとめ

- **可制御性スコアリング**は開集合を定義域とする境界発散型の凸最適化問題なので、その凸最適化問題のアルゴリズムを適用可能
- 開集合を定義域とする境界発散型の凸最適化問題の強凸性の条件を解析して、**可制御性スコア**の一意性解析に役立つ制限方向上の単射性の条件が得られる
- 通常の**可制御性スコア**では、この制限方向上の単射性の条件がほとんどすべての $T > 0$ で成立する

第三部： $T \rightarrow \infty$ での議論

- (1) 可制御性グラミアンのスケーリングと極限
- (2) 無限時間可制御性スコアリング問題の定式化
- (3) エピ収束による最適解の収束解析
- (4) 可制御性スコアリング問題への応用

K. Umezumi and K. Sato: Infinite-horizon controllability scores for linear time-invariant systems,
<https://arxiv.org/pdf/2601.10260>

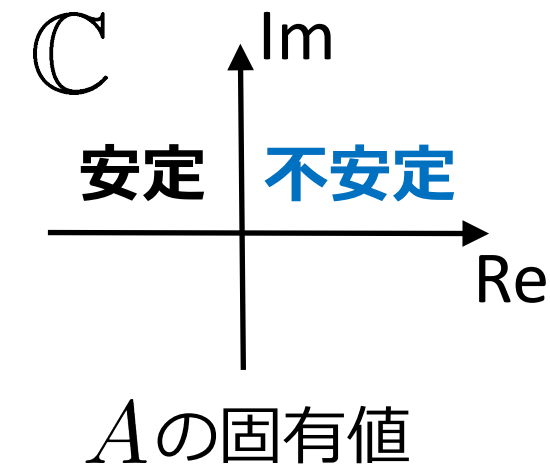
$T \rightarrow \infty$ での可制御性スコア

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(p)u(t) \quad B(p) = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$$

$$W(p, T) = \int_0^T \exp(At) B(p) B(p)^\top \exp(A^\top t) dt \quad \text{可制御性グラミアン}$$

T が有限のときは任意の A に対して $W(p, T)$ は定義可能

$T \rightarrow \infty$ のときは**安定**な A に対してだけ $\lim_{T \rightarrow \infty} W(p, T)$ は定義可能



不安定な A も応用上はよく現れる

例1：グラフラプラシアンダイナミクス（合意形成）

例2：SNS炎上のモデル化

➡ 適切な**介入**は大事

➡ 大きな $T > 0$ での**可制御性スコア**を理解するために、
 $T \rightarrow \infty$ での**可制御性スコア**を研究する

では A のジョルダン標準形を考えてるが, 煩雑なため A を対角化可能とする

$$Q^{-1}AQ = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_-}}_{\text{Re} < 0}, \underbrace{\lambda_{n_-+1}, \dots, \lambda_{n_-+n_0}}_{\text{Re} = 0}, \underbrace{\lambda_{n_-+n_0+1}, \dots, \lambda_n}_{\text{Re} > 0})$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(p)u(t)$$

$$\updownarrow x(t) = Q\tilde{x}(t) \quad (t \in [0, T])$$

標準基底の座標から
固有ベクトルの基底の座標へ

$$\dot{\tilde{x}}(t) = Q^{-1}AQ\tilde{x}(t) + Q^{-1}B(p)u(t)$$

$$\updownarrow \tilde{x}(t) = D(T)\hat{x}_T(t) \quad (t \in [0, T])$$

固有ベクトルの基底の座標から
スケーリング基底の座標へ

$$\dot{\hat{x}}_T(t) = (QD(T))^{-1}A(QD(T))\hat{x}_T(t) + (QD(T))^{-1}B(p)u(t)$$

$$\widehat{W}(p, T) = D(T)^{-1}Q^{-1}W(p, T)Q^{-*}D(T)^{-*} \quad \hat{x}_T \text{ 座標での可制御性グラミアン}$$

$D(T)$ を適切に定めることで $\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{W}(p, T)$ を定義できるはず

$$\widehat{W}(p, T) = D(T)^{-1} Q^{-1} W(p, T) Q^{-*} D(T)^{-*}$$

$$(Q^{-1} W(p, T) Q^{-*})_{ii} = \begin{cases} O(1) & (\operatorname{Re} \lambda_i < 0) \\ O(T) & (\operatorname{Re} \lambda_i = 0) \\ O(e^{2(\operatorname{Re} \lambda_i)T}) & (\operatorname{Re} \lambda_i > 0) \end{cases}$$

この成長率を正規化するように

$$D(T) := \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\operatorname{Re} < 0}, \underbrace{T^{1/2}, \dots, T^{1/2}}_{\operatorname{Re} = 0}, \underbrace{e^{\lambda_{n_- + n_0 + 1} T}, \dots, e^{\lambda_n T}}_{\operatorname{Re} > 0})$$

このスケーリングのもとで極限は存在し,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{W}(p, T) = \operatorname{diag}(W_-(p), W_0(p), W_+(p)) =: W_\infty(p)$$

$W_-(p)$: 安定モード $W_0(p)$: 中立モード $W_+(p)$: 不安定モード

【VCSの目的関数】

$$f_T(p) = -\log \det W(p, T) = -\log \det \widehat{W}(p, T) - \log \det(QD(T)D(T)^*Q^*)$$

p と独立

$T \rightarrow \infty$ のときは $-\log \det W_\infty(p)$ を考えれば良さそう

【AECSの目的関数】

$$g_T(p) = \text{tr}(W(p, T)^{-1}) = \text{tr}(Q^{-*}D(T)^{-*}\widehat{W}(p, T)^{-1}D(T)^{-1}Q^{-1})$$

$\downarrow T \rightarrow \infty$ (正確な議論は**演習の解説**)

$$\begin{aligned} & \text{tr}(Q^{-*} \text{diag}(I_{n_-}, 0, 0) \text{diag}(W_-(p)^{-1}, W_0(p)^{-1}, W_+(p)^{-1}) \text{diag}(I_{n_-}, 0, 0) Q^{-1}) \\ &= \text{tr}(Q^{-*} \text{diag}(W_-(p)^{-1}, O, O) Q^{-1}) \end{aligned}$$

➡ $W_-(p) \succ O$ という制約を考えることになる

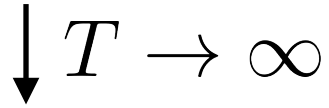
➡ $T \rightarrow \infty$ で**不**可制御になりえる原因

$T > 0$ given $X_T := \{p \in \mathbb{R}^n \mid W(p, T) \succ O\}$

minimize $-\log \det W(p, T)$
subject to $p \in X_T \cap \Delta_n$



minimize $-\log \det \widehat{W}(p, T)$
subject to $p \in \Delta_n, \widehat{W}(p, T) \succ O$

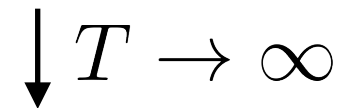


minimize $-\log \det W_\infty(p)$
subject to $p \in \Delta_n$
 $W_\infty(p) \succ O$

minimize $\text{tr} (W(p, T)^{-1})$
subject to $p \in X_T \cap \Delta_n$



minimize $\text{tr}(Q^{-*} D(T)^{-*} \widehat{W}(p, T)^{-1} D(T)^{-1} Q^{-1})$
subject to $p \in \Delta_n, \widehat{W}(p, T) \succ O$

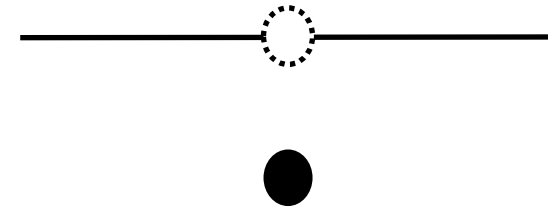


minimize $\text{tr}(Q^{-*} \text{diag}(W_-(p)^{-1}, O, O) Q^{-1})$
subject to $p \in \Delta_n$
 $W_-(p) \succ O$

有限時間の可制御性スコアは $T \rightarrow \infty$ で **極限問題** の最適解に収束するだろうか？

有限時間と無限時間の問題の関係を理解するための概念

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$



$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{点 } \bar{x} \text{ で下半連続}$$

$$:\Leftrightarrow f(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) \quad \text{for } \forall \{x^{(k)}\} \text{ satisfying } x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ は下半連続 (任意の点 } \bar{x} \text{ で下半連続)}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ のエピグラフ } \text{epi } f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\} \text{ は閉集合}$$

$$\text{例 } C \subset \mathbb{R}^n$$

$$C \text{ は閉集合 } \Leftrightarrow I_C(x) := \begin{cases} 0 & (x \in C) \\ \infty & (x \notin C) \end{cases} \text{ は下半連続}$$

C の標示関数 (Indicator function)

例 $f^{(k)} := I_{[1/k, 1]} \quad (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \infty$

$$f := I_{[0, 1]} \Rightarrow f(0) = 0$$

$[0, 1]$ 全体では $f^{(k)}$ は f に**各点収束**しない (0でしてない)

$(0, 1)$ では $f^{(k)}$ は f に**各点収束**する

実際には, $(0, 1)$ の**任意のコンパクト集合上**で $f^{(k)}$ は f に**一様収束**する
(局所一様収束性)

➡ 内部で各点収束しても境界の点で収束しないことがある

しかし動く点列を許すと, 境界の点でも収束することがある

$f^{(k)}\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \rightarrow f(0)$ 関数が変わると最適解も変わるので,
最適解の収束を考えるときは動く点列を許容したい

$f^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に**エピ収束**するとは

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して以下が成り立つときにいう：

$$(1) \quad f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \quad \text{for } \forall \{x^{(k)}\} \text{ satisfying } x^{(k)} \rightarrow x$$

$$(2) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \leq f(x) \quad \text{for } \exists \{x^{(k)}\} \text{ satisfying } x^{(k)} \rightarrow x$$

(2)を満たす $\{x^{(k)}\}$ を x に対する**回復列**という

回復列 $\{x^{(k)}\}$ では $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) = f(x)$

 極限問題の目的関数値が近似問題の関数値で実現できる

※エピ収束はエピグラフ $\text{epi } f^{(k)}$ の $\text{epi } f$ への集合収束として理解可能

定理 (演習)

$C \subset \mathbb{R}^n$ コンパクトな凸集合 $\text{int } C \neq \emptyset$

(1) $f^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はプロパーで凸な下半連続関数

(2) $f^{(k)}(x) = f(x) = \infty \quad (x \notin C)$

(3) f は $\text{int } C$ 上で有限である

(4) $\text{int } C$ 上の**任意のコンパクト集合**上で $f^{(k)}$ は f に**一様収束**する
(局所一様収束性)

(1)~(4)が成立 $\Rightarrow f^{(k)}$ は f に**エビ収束**する

※プロパー：任意の点で $-\infty$ とはならず, 少なくとも1点で有限値をとる

定理 (演習)

$C \subset \mathbb{R}^n$ 非空なコンパクト集合

(1) $f^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はプロパーな下半連続関数

(2) $f^{(k)}(x) = f(x) = \infty \quad (x \notin C)$

(3) $f^{(k)}$ は f に**エビ収束**する

(1), (2), (3)が成立する (前ページの定理の仮定が満たされたら成立) と以下が成立する :

$\varepsilon^{(k)} \geq 0, \varepsilon^{(k)} \rightarrow 0$ とし $f^{(k)}(x^{(k)}) \leq \inf_{x \in C} f^{(k)}(x) + \varepsilon^{(k)}$ を満たす $\{x^{(k)}\}$ をとると

$\{x^{(k)}\}$ の任意の集積点は $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f$ に属す

さらに, $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f = \{x^*\} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$

より一般的な変分解析について

ここまでの内容は

R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, 1998

のTheorem 7.17とTheorem 7.33を**可制御性スコア**への応用に必要な形に修正した内容

特にコンパクトな凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ 上で考えることで議論を大幅に簡略化できている

Variational analysisは**変分解析**ということだが、物理では関数を少し変化させたときに汎関数はどう変化するかを調べることを**変分法**といった。

上の本ではもっと広く変分という言葉を使っており、

変数・関数・制約集合・最適解の摂動を統一的に扱う

可制御性スコアリング問題への一般論の応用

$T > 0$ given $X_T := \{p \in \mathbb{R}^n \mid W(p, T) \succ O\}$

minimize $-\log \det W(p, T)$
subject to $p \in X_T \cap \Delta_n$



minimize $-\log \det \widehat{W}(p, T)$
subject to $p \in \Delta_n, \widehat{W}(p, T) \succ O$

minimize $\text{tr} (W(p, T)^{-1})$
subject to $p \in X_T \cap \Delta_n$



minimize $\text{tr}(Q^{-*} D(T)^{-*} \widehat{W}(p, T)^{-1} D(T)^{-1} Q^{-1})$
subject to $p \in \Delta_n, \widehat{W}(p, T) \succ O$

$$\widehat{W}(p, T) = D(T)^{-1} Q^{-1} W(p, T) Q^{-*} D(T)^{-*}$$

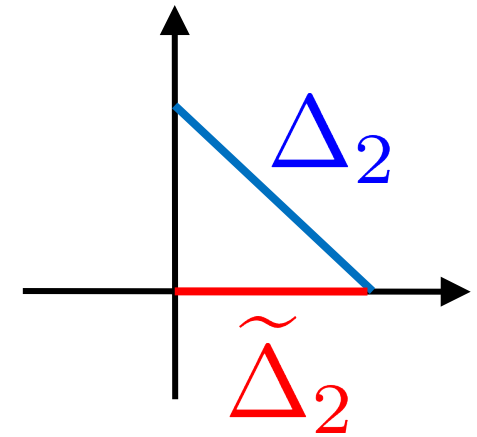
Q : 対角化のための座標変換行列

$D(T)$: スケーリング行列

有限時間の可制御性スコアは $T \rightarrow \infty$ で何に収束するかを解析する

可制御性スコアリング問題では

$$\Delta_n := \{(p_i) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$



が現れていたが $\text{int } \Delta_n = \emptyset$ のためエピソードの一般論を使いにくい



$$\tilde{\Delta}_n := \left\{ (\tilde{p}_i) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \tilde{p}_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n-1), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i \leq 1 \right\}$$

$$\varphi : \tilde{\Delta}_n \rightarrow \Delta_n \text{ を } \varphi(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}) = \left(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i \right) \text{ と}$$

定めると φ は同相写像であり,

$$\text{int } \tilde{\Delta}_n = \left\{ (\tilde{p}_i) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \tilde{p}_i > 0 \ (i = 1, \dots, n-1), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i < 1 \right\} \neq \emptyset$$

なので Δ_n の代わりに $\tilde{\Delta}_n$ を考える

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -\log \det \widehat{W}(p, T) \\ \text{subject to} & p \in \Delta_n, \widehat{W}(p, T) \succ O \end{array}$$

➡ 最適解は**VCS**

$$\Updownarrow T = T_k$$

$$\min_{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1}} F^{(k)}(\tilde{p}) := \begin{cases} -\log \det \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k) & \text{if } \tilde{p} \in \tilde{\Delta}_n, \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k) \succ O, \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

➡ $F^{(k)} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はプロパーで凸な下半連続関数

$\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を $T_k > 0, T_k \rightarrow \infty$ を満たす任意の数列とする

➡ $\{F^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ を目的関数列とする最適解の列 $\{p_{\text{VCS}}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ の収束解析をする

$\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{W}(p, T) = \text{diag}(W_-(p), W_0(p), W_+(p)) =: W_\infty(p)$ だったので,

$\min_{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1}} F^{(k)}(\tilde{p})$ は $k \rightarrow \infty$ で以下の最適化問題と関連付くと予想する

$$\min_{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1}} F(\tilde{p}) := \begin{cases} -\log \det W_\infty(\varphi(\tilde{p})) & \text{if } \tilde{p} \in \tilde{\Delta}_n, W_\infty(\varphi(\tilde{p})) \succ O, \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$F : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はプロパーで凸な下半連続関数

この最適化問題の最適解 p_{VCS}^∞ は一意と仮定する (存在性は常に保証可能)

$\{F^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が F に**エピ収束**すれば $\{p_{\text{VCS}}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は p_{VCS}^∞ へ収束する

➡ $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ 上の**任意のコンパクト集合上**で $\{F^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は F に**一様収束**すること
を示せば**エピ収束**が保証される (他の条件は成立していることを確認済み)

$K \subset \text{int } \tilde{\Delta}_n$ を任意のコンパクト集合として以下を示せば良い

$$\sup_{\tilde{p} \in K} |F^{(k)}(\tilde{p}) - F(\tilde{p})| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

証明の概略（詳細は演習の解説参照）

(1) $\{\widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ は $W_\infty(\varphi(\tilde{p}))$ に K 上で一様収束

(2) $W_\infty(\varphi(\tilde{p}))$ と十分大きな k の $\widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)$ は
ある共通のコンパクト集合 $\mathcal{M}_K$ に含まれる

(3) $-\log \det$ は $\mathcal{M}_K$ 上で一様連続

(4) $\{F^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は F に K 上で一様収束

$$\begin{aligned} &\textbf{minimize} \quad \text{tr}(Q^{-*} D(T)^{-*} \widehat{W}(p, T)^{-1} D(T)^{-1} Q^{-1}) \\ &\textbf{subject to} \quad p \in \Delta_n, \widehat{W}(p, T) \succ O \end{aligned}$$

➡ 最適解は**AECS**

$$\Updownarrow T = T_k$$

$$\min_{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1}} G^{(k)}(\tilde{p}) := \begin{cases} \text{tr} \left(Q^{-*} D(T_k)^{-*} \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)^{-1} D(T_k)^{-1} Q^{-1} \right) \\ \quad \text{if } \tilde{p} \in \tilde{\Delta}, \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k) \succ O, \\ \infty \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

➡ $G^{(k)} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はプロパーで凸な下半連続関数

$\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を $T_k > 0, T_k \rightarrow \infty$ を満たす任意の数列とする

➡ $\{G^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ を目的関数列とする最適解の列 $\{p_{\text{AECS}}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ の収束解析をする

$\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{W}(p, T) = \text{diag}(W_-(p), W_0(p), W_+(p)) =: W_\infty(p)$ だったので,

$\min_{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1}} G^{(k)}(\tilde{p})$ は $k \rightarrow \infty$ で以下の最適化問題と関連付くと予想する

$$\min_{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1}} G(\tilde{p}) := \begin{cases} \text{tr}(Q^{-*} \text{diag}(W_-(p)^{-1}, O, O) Q^{-1}) & \text{if } \tilde{p} \in \tilde{\Delta}, W_-(\varphi(\tilde{p})) \succ O, \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

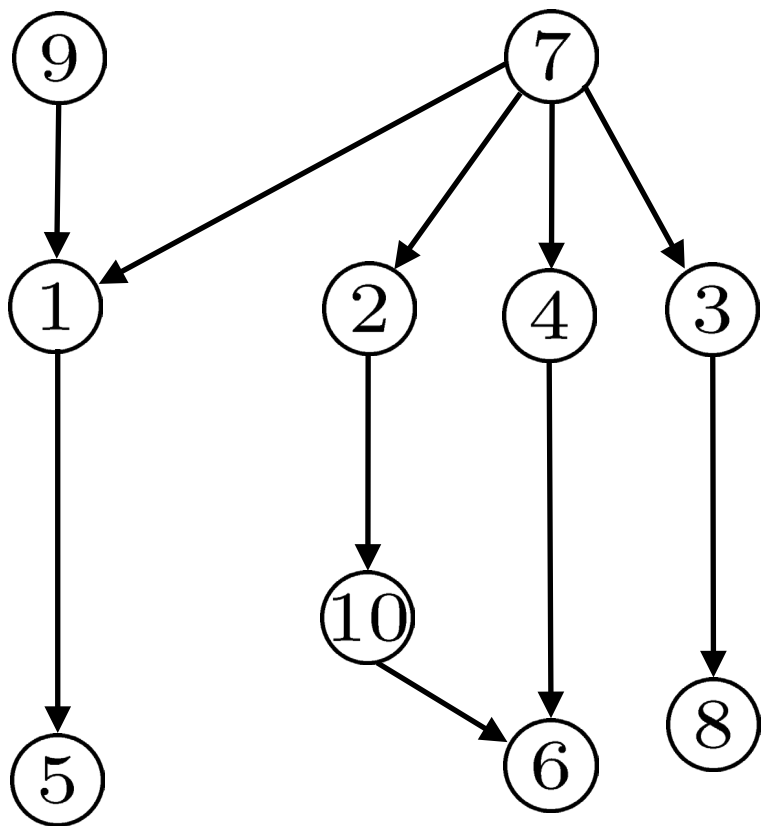
$G : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はプロパーで凸な下半連続関数

この最適化問題の最適解 p_{AECS}^∞ は一意と仮定する (存在性は常に保証可能)

$\{G^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が G に**エピ収束**すれば $\{p_{\text{AECS}}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は p_{AECS}^∞ へ収束する

証明は目的関数に $D(T)$ がある影響でvcsの場合に比べて難しくなる
(詳細は演習の解説参照)

第一部で紹介した例



枝の重みはすべて0.2

ノード	VCS		AECS	
	$T = 10^4$	$T = \infty$	$T = 10^4$	$T = \infty$
1	0.073	0.073	0.173	0.174
2	0.101	0.101	0.114	0.114
3	0.109	0.109	0.121	0.122
4	0.086	0.086	0.106	0.106
5	0.045	0.045	0.092	0.093
6	0.061	0.061	0.134	0.134
7	0.250	0.250	0.093	0.092
8	0.042	0.042	0.069	0.069
9	0.167	0.167	0.002	0.000
10	0.066	0.066	0.096	0.095

➡ グラフラプラシアン L を作って $A = -L$ と定義

➡ ノード9は0固有値（安定モードでない）に対応する方向の可制御性には必要だが、AECSは $T = \infty$ では**安定モードだけ**を評価するので**0.000**になっている

無限時間の問題の数値解法に関する注意

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & -\log \det W_{\infty}(p) \\ \text{subject to} & p \in \Delta_n \\ & W_{\infty}(p) \succ O\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \text{tr}(Q^{-*} \text{diag}(W_{-}(p)^{-1}, O, O) Q^{-1}) \\ \text{subject to} & p \in \Delta_n \\ & W_{-}(p) \succ O\end{array}$$

$$W_{\infty}(p) := \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{W}(p, T) = \text{diag}(W_{-}(p), W_0(p), W_{+}(p))$$

$$\widehat{W}(p, T) = D(T)^{-1} Q^{-1} W(p, T) Q^{-*} D(T)^{-*}$$

Q : 対角化のための座標変換行列

$D(T)$: スケーリング行列

A は虚軸上に固有値があっても0だけで, 0は**半単純** (虚軸上の固有値なしでも良い)

という仮定を満たすと Q と $D(T)$ を求めずに, 数値的に安定な方法で, 同値な問題を構築して $T = \infty$ での**VCS**と**AECS**を求めることが可能

第三部のまとめ

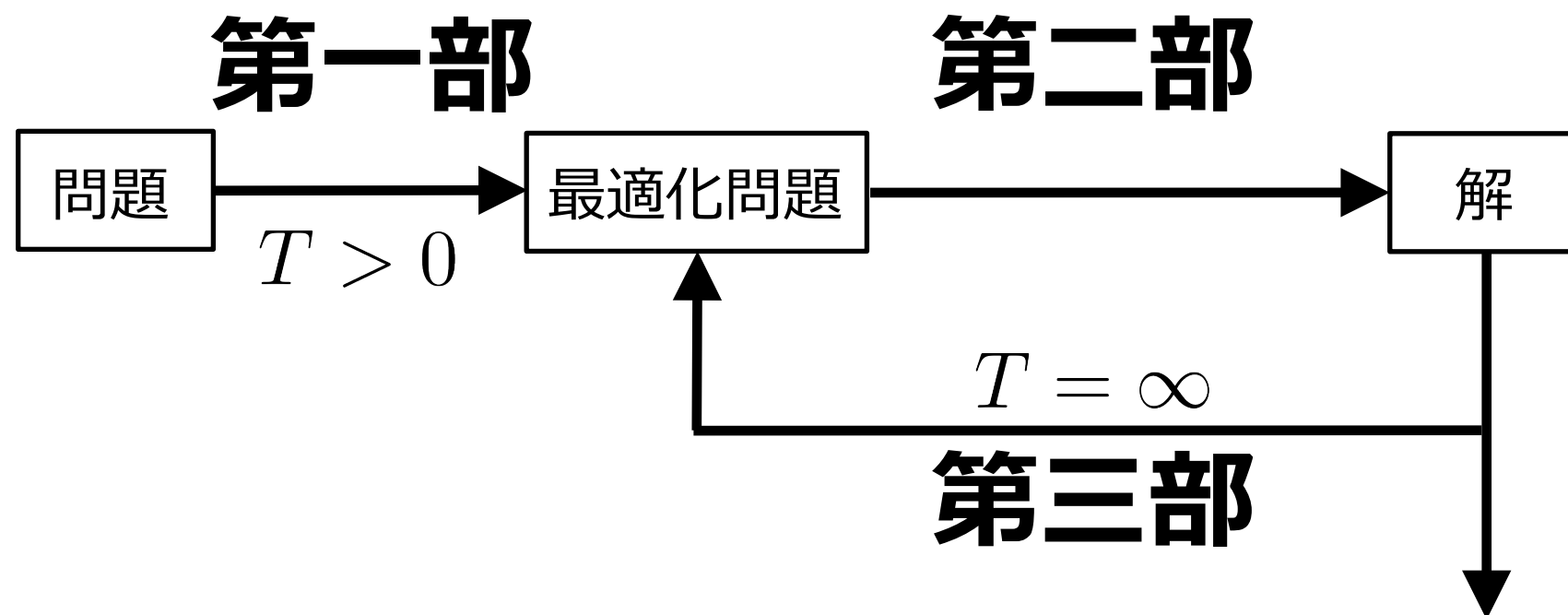
- 不安定系でもモードごとのスケーリングにより $T \rightarrow \infty$ の極限問題を定式化できる
- エピ収束の概念を利用して有限時間の可制御性スコアの極限が理解できる
- $T = \infty$ では**VCS**と**AECS**が評価するモードが異なる

VCS : 安定・中立・不安定モードをすべて評価

AECS : 安定モードだけを評価

そのため**AECS**では中立・不安定モードの可制御性に必要な入力のスコアが0になりえる

全体のまとめ



可制御性スコアリングは**可制御性**という制御理論の概念を,
「介入の意思決定」のための**連続最適化問題**へ関係付ける