

連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2026

可制御性スコアの数理と連続最適化（演習問題）

佐藤一宏（東京大学大学院情報理工学系研究科）

演習 1 では射影勾配法の基本的な性質を扱う。演習 2, 3 ではエピソード収束と最小解の収束に関する基本的な結果を扱う。演習 2, 3 は [1] を理解するための基礎となる。

1 第二部スライドの演習

演習 1 (射影勾配法の降下性と停止判定). $C \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト凸集合, $U \subset \mathbb{R}^n$ を非空な開凸集合とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能な凸関数とする. P_C を C 上への Euclid 射影

$$P_C(z) := \arg \min_{y \in C} \|y - z\|$$

として, $p \in C \cap U$, $\alpha > 0$ とする.

(i) 任意の $z \in \mathbb{R}^n$ と $q \in C$ に対して,

$$q = P_C(z) \tag{1}$$

であることと

$$(z - q)^\top (y - q) \leq 0 \quad (\forall y \in C) \tag{2}$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

(ii)

$$q := P_C(p - \alpha \nabla f(p)) \tag{3}$$

とおくと以下が成り立つことを示せ:

$$\nabla f(p)^\top (q - p) \leq -\frac{1}{\alpha} \|q - p\|^2. \tag{4}$$

(iii) 射影勾配写像

$$\mathcal{G}_\alpha(p) := \frac{1}{\alpha} (p - P_C(p - \alpha \nabla f(p))) \tag{5}$$

を定める. 以下は同値であることを示せ.

(a) $\mathcal{G}_\alpha(p) = 0$.

(b) $\nabla f(p)^\top (y - p) \geq 0 \quad (\forall y \in C)$.

(c) $p \in \arg \min_{x \in C \cap U} f(x)$.

2 第三部スライドの演習（内部局所一様収束からエピソード収束へ）

凸関数列のエピソード収束と内部コンパクト集合上の一様収束との関係については, Rockafellar–Wets [2, Theorem 7.17] に一般的な結果が知られている. ここでは, 可制御性スコアへの応用で現れる「共通のコンパクト凸集合上で定義された拡張実数値凸関数」という設定に限定し, 必要な結果を直接証明する.

演習 2 (コンパクト凸集合上のエピソード収束定理). $C \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトな凸集合とし, $\text{int } C \neq \emptyset$ とする. $f^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ および $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が次を満たすと仮定する.

1. 各 $f^{(k)}$ と f はプロパーで凸な下半連続関数である.

2.

$$f^{(k)}(x) = f(x) = +\infty \quad (x \notin C).$$

3. f は $\text{int } C$ 上で有限である.

4. $\text{int } C$ の任意のコンパクト集合 K 上で $\{f^{(k)}\}$ は f に一様収束する. すなわち,

$$\sup_{x \in K} |f^{(k)}(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

以下の小問を解くことで, $\{f^{(k)}\}$ が f にエピソード収束することを示せ.

(i) $a \in \text{int } C$ を固定し, $0 \leq t < 1$ に対して

$$C_t := (1-t)a + tC (= \{(1-t)a + tc \mid c \in C\}) \quad (6)$$

と定める. C_t はコンパクトであり, $C_t \subset \text{int } C$ が成り立つことを示せ.

(ii) (i) と同じ $a \in \text{int } C$ を固定し, $x \in C$ に対して

$$x_t := (1-t)a + tx \quad (0 \leq t < 1)$$

とおく. このとき

$$f(x_t) \rightarrow f(x) \quad (t \uparrow 1) \quad (7)$$

が成り立つことを示せ. $f(x) < +\infty$ の場合と $f(x) = +\infty$ の場合を分けて考えよ.

注意: 境界で連続性がなくても, 境界点 x の関数値 $f(x)$ を内部点から x へ向かう方向の点 x_t の関数値 $f(x_t)$ の極限として再現できることを表している. この性質は (v) で境界点に対する回復列を構成するときに利用可能である.

(iii) $x \in C$ として, $x^{(k)} \rightarrow x$ を満たす $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^{(k)}\}$ で, 十分大きい k について $x^{(k)} \in C$ であるものを考える. $a \in \text{int } C$ を一つ固定し, さらに $t \in (0, 1)$ を固定して

$$x_t^{(k)} := (1-t)a + tx^{(k)}, \quad x_t := (1-t)a + tx \quad (8)$$

とおき,

$$f^{(k)}(x_t^{(k)}) \rightarrow f(x_t), \quad f^{(k)}(a) \rightarrow f(a) \quad (9)$$

を導け. ただし, f が $\text{int } C$ 上で有限な凸関数であることから, f は $\text{int } C$ 上で連続であるという事実を用いてよい.

(iv) 任意の $x^{(k)} \rightarrow x$ について

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \quad (10)$$

が成り立つことを示せ ($x \notin C$ の場合および $f(x) = +\infty$ の場合も明示的に扱うこと).

ヒント: $x \in C$ かつ $\liminf_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) < +\infty$ の場合には, 下極限を実現する部分列を取り, (iii) と $f^{(k)}$ の凸性を用いよ.

(v) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, ある $x^{(k)} \rightarrow x$ が存在して

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \leq f(x) \quad (11)$$

となることを示せ.

ヒント: x が C の境界点の場合には (ii) の結果を用いることができる.

3 第三部スライドの演習 (近似最小解の収束)

エピソードから最小値および近似最小解の収束を導く一般的な結果として, Rockafellar–Wets [2, Theorem 7.33] がある. ここではすべての目的関数が共通のコンパクト集合 C の外で $+\infty$ となるため, このコンパクト性を直接利用して必要な結果を証明する.

演習 3 (コンパクト集合上の最小値・最小解の収束). $C \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト集合とする. $f^{(k)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ および $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について, 次を仮定する.

1. 各 $f^{(k)}$ と f はプロパーな下半連続関数である.
2. $x \notin C$ ならば $f^{(k)}(x) = f(x) = +\infty$ である.
3. $\{f^{(k)}\}$ は f にエピソード収束する.

各 k について $m_k := \min_{x \in C} f^{(k)}(x)$ を定め, $m := \min_{x \in C} f(x)$ とおく^{*1}. また, $\varepsilon^{(k)} \geq 0$, $\varepsilon^{(k)} \rightarrow 0$ とし,

$$f^{(k)}(x^{(k)}) \leq m_k + \varepsilon^{(k)} \quad (12)$$

を満たす列 $\{x^{(k)}\}$ を取る. 以下を示せ.

- (i) $m_k \rightarrow m$ が成り立つ.
- (ii) $\{x^{(k)}\}$ の任意の集積点は $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ の元である.
- (iii) $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \{x^*\} \implies x^{(k)} \rightarrow x^*$ である.

参考文献

- [1] K. Umezū and K. Sato, “Infinite-horizon controllability scores for linear time-invariant systems,” arXiv:2601.10260, 2026.
- [2] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

^{*1} 各 $f^{(k)}$ および f は仮定より C 上で有限な最小値を達成することに注意する (コンパクト集合上の下半連続関数に対する Weierstrass の定理より).