連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2026
可制御性スコアの数理と連続最適化（演習問題）

佐藤一宏（東京大学大学院情報理工学系研究科）

演習 1 では射影勾配法の基本的な性質を扱う．演習 2, 3 ではエピ収束と最小解の収束に関する基本的な結果を扱う．演習 2, 3 は [1] を理解するための基礎となる．

1　第二部スライドの演習

演習 1 (射影勾配法の降下性と停止判定)**.** $C \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト凸集合，$U \subset \mathbb{R}^n$ を非空な開凸集合とし，$f : U \to \mathbb{R}$ を微分可能な凸関数とする．P_C を C 上への Euclid 射影

$$P_C(z) := \operatorname*{arg\,min}_{y \in C} \|y - z\|$$

として，$p \in C \cap U$，$\alpha > 0$ とする．

(i) 任意の $z \in \mathbb{R}^n$ と $q \in C$ に対して，

$$q = P_C(z) \tag{1}$$

であることと

$$(z - q)^\top (y - q) \leq 0 \qquad (\forall y \in C) \tag{2}$$

が成り立つことは同値であることを示せ．

(ii)

$$q := P_C\big(p - \alpha \nabla f(p)\big) \tag{3}$$

とおくと以下が成り立つことを示せ：

$$\nabla f(p)^\top (q - p) \leq -\frac{1}{\alpha} \|q - p\|^2 . \tag{4}$$

(iii) 射影勾配写像

$$\mathcal{G}_\alpha(p) := \frac{1}{\alpha} \big(p - P_C\big(p - \alpha \nabla f(p)\big)\big) \tag{5}$$

を定める．以下は同値であることを示せ．

(*a*) $\mathcal{G}_\alpha(p) = 0$.

(*b*) $\nabla f(p)^\top (y - p) \geq 0 \qquad (\forall y \in C)$.

(*c*) $p \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in C \cap U} f(x)$.

2　第三部スライドの演習（内部局所一様収束からエピ収束へ）

凸関数列のエピ収束と内部コンパクト集合上の一様収束との関係については, Rockafellar–Wets [2, Theorem 7.17] に一般的な結果が知られている．ここでは，可制御性スコアへの応用で現れる「共通のコンパクト凸集合上で定義された拡張実数値凸関数」という設定に限定し，必要な結果を直接証明する．

演習 2 (コンパクト凸集合上のエピ収束定理)**.** $C \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトな凸集合とし，$\operatorname{int} C \neq \varnothing$ とする．$f^{(k)} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ および $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ が次を満たすと仮定する．

1. 各 $f^{(k)}$ と f はプロパーで凸な下半連続関数である．
2. $x \notin C$ ならば $f^{(k)}(x) = f(x) = +\infty$ である．
3. f は $\operatorname{int} C$ 上で有限である．
4. $\operatorname{int} C$ の任意のコンパクト集合 K 上で $\{f^{(k)}\}$ は f に一様収束する．すなわち，

$$\sup_{x \in K} \left| f^{(k)}(x) - f(x) \right| \longrightarrow 0.$$

以下の小問を解くことで，$\{f^{(k)}\}$ が f にエピ収束することを示せ．

(i) $a \in \operatorname{int} C$ を固定し，$0 \leq t < 1$ に対して

$$C_t := (1-t)a + tC \,(= \{(1-t)a + tc \mid c \in C\}) \tag{6}$$

と定める．C_t はコンパクトであり，$C_t \subset \operatorname{int} C$ が成り立つことを示せ．

(ii) *(i)* と同じ $a \in \operatorname{int} C$ を固定し，$x \in C$ に対して

$$x_t := (1-t)a + tx \qquad (0 \leq t < 1)$$

とおく．このとき

$$f(x_t) \longrightarrow f(x) \qquad (t \uparrow 1) \tag{7}$$

が成り立つことを示せ．

注意：境界で連続性がなくても，境界点 x の関数値 $f(x)$ を内部点から x へ向かう方向の点 x_t の関数値 $f(x_t)$ の極限として再現できることを表している．この性質は *(v)* で境界点に対する回復列を構成するときに利用可能である．

(iii) $x \in C$ として，$x^{(k)} \to x$ を満たす $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^{(k)}\}$ で，十分大きい k について $x^{(k)} \in C$ であるものを考える．$a \in \operatorname{int} C$ を一つ固定し，さらに $t \in (0,1)$ を固定して

$$x_t^{(k)} := (1-t)a + tx^{(k)}, \qquad x_t := (1-t)a + tx \tag{8}$$

とおき，

$$f^{(k)}(x_t^{(k)}) \longrightarrow f(x_t), \qquad f^{(k)}(a) \longrightarrow f(a) \tag{9}$$

を導け．ただし，f が $\operatorname{int} C$ 上で有限な凸関数であることから，f は $\operatorname{int} C$ 上で連続であるという事実を用いてよい．

(iv) 任意の $x^{(k)} \to x$ について

$$f(x) \le \liminf_{k\to\infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \tag{10}$$

が成り立つことを示せ．

(v) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，ある $x^{(k)} \to x$ が存在して

$$\limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \le f(x) \tag{11}$$

となることを示せ．

ヒント：x が C の境界点の場合には *(ii)* の結果を用いることができる．

3　第三部スライドの演習（近似最小解の収束）

エピ収束から最小値および近似最小解の収束を導く一般的な結果として，Rockafellar–Wets [2, Theorem 7.33] がある．ここではすべての目的関数が共通のコンパクト集合 C の外で $+\infty$ となるため，このコンパクト性を直接利用して必要な結果を証明する．

演習 3 (コンパクト集合上の最小値・最小解の収束)**.** $C \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト集合とする．$f^{(k)} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ および $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ について，次を仮定する．

1. 各 $f^{(k)}$ と f はプロパーな下半連続関数である．
2. $x \notin C$ ならば $f^{(k)}(x) = f(x) = +\infty$ である．
3. $\{f^{(k)}\}$ は f にエピ収束する．

各 k について $m_k := \min_{x\in C} f^{(k)}(x)$ を定め，$m := \min_{x\in C} f(x)$ とおく[*1]．また，$\varepsilon^{(k)} \ge 0$，$\varepsilon^{(k)} \to 0$ とし，

$$f^{(k)}(x^{(k)}) \le m_k + \varepsilon^{(k)} \tag{12}$$

を満たす列 $\{x^{(k)}\}$ を取る．以下を示せ．

(i) $m_k \longrightarrow m$ が成り立つ．

(ii) $\{x^{(k)}\}$ の任意の集積点は $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ の元である．

(iii) $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \{x^*\} \quad\Longrightarrow\quad x^{(k)} \longrightarrow x^*$ である．

参考文献

[1] K. Umezu and K. Sato, “Infinite-horizon controllability scores for linear time-invariant systems,” arXiv:2601.10260, 2026.

[2] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[*1] 各 $f^{(k)}$ および f は仮定より C 上で有限な最小値を達成することに注意する（コンパクト集合上の下半連続関数に対する Weierstrass の定理より）．