

連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2026 可制御性スコアの数理と連続最適化（演習問題の詳説）

佐藤一宏（東京大学大学院情報理工学系研究科）

目次

1	射影勾配法の基本性質（第二部スライドの演習）	1
2	内部局所一様収束からエピ収束へ（第三部スライドの演習）	3
3	近似最小解の収束（第三部スライドの演習）	7
4	可制御性スコアへの応用：有限時間から無限時間へ	8
4.1	有限時間の可制御性スコアリング問題	8
4.2	なぜ $T \rightarrow \infty$ をそのまま考えられないのか	9
4.3	モードごとのスケーリング	9
4.4	スケーリングしても有限時間のスコアは変わらない	10
4.5	数列による $T \rightarrow \infty$ の特徴付け	10
5	点ごとのグラミアン収束から一様収束へ	10
5.1	可制御性グラミアンのアフィン性が重要	11
5.2	内部コンパクト集合では正定値性に様な余裕がある	11
6	VCS	12
6.1	VCS の場合の一様収束性	13
6.2	VCS の場合のエピ収束と最適解の収束	14
7	AECS	14
7.1	AECS の場合の一様収束性	16
7.2	AECS の場合のエピ収束と最適解の収束	17
8	無限時間で VCS と AECS は何を評価するのか	17

1 射影勾配法の基本性質（第二部スライドの演習）

ここでは、第二部スライドに現れる射影勾配法について、射影の最適性条件、降下性、アルミホ条件、最適性判定、停止条件の関係を確認する。

演習 1 (射影勾配法の降下性と停止判定). $C \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト凸集合, $U \subset \mathbb{R}^n$ を非空な開凸集合とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能な凸関数とする. P_C を C 上への Euclid 射影

$$P_C(z) := \arg \min_{y \in C} \|y - z\|$$

として, $p \in C \cap U$, $\alpha > 0$ とする.

(i) 任意の $z \in \mathbb{R}^n$ と $q \in C$ に対して,

$$q = P_C(z) \tag{1}$$

であることと

$$(z - q)^\top (y - q) \leq 0 \quad (\forall y \in C) \tag{2}$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

(ii)

$$q := P_C(p - \alpha \nabla f(p)) \tag{3}$$

とおくと以下が成り立つことを示せ:

$$\nabla f(p)^\top (q - p) \leq -\frac{1}{\alpha} \|q - p\|^2. \tag{4}$$

(iii) 射影勾配写像

$$\mathcal{G}_\alpha(p) := \frac{1}{\alpha} (p - P_C(p - \alpha \nabla f(p))) \tag{5}$$

を定める. 以下は同値であることを示せ.

(a) $\mathcal{G}_\alpha(p) = 0$.

(b) $\nabla f(p)^\top (y - p) \geq 0 \quad (\forall y \in C)$.

(c) $p \in \arg \min_{x \in C \cap U} f(x)$.

解答 (i) (1) が成り立つとし, 任意の $y \in C$ を取る. C は凸なので, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $q_t := q + t(y - q) \in C$ である. q は z の C 上への射影なので,

$$\|q - z\|^2 \leq \|q_t - z\|^2 = \|q - z\|^2 + 2t(q - z)^\top (y - q) + t^2 \|y - q\|^2.$$

したがって, $t > 0$ に対して $0 \leq 2(q - z)^\top (y - q) + t \|y - q\|^2$ なので, $t \downarrow 0$ とすることで (2) を得る.

逆に, (2) が成り立つとする. 任意の $y \in C$ について

$$\|y - z\|^2 = \|(y - q) + (q - z)\|^2 = \|q - z\|^2 + 2(q - z)^\top (y - q) + \|y - q\|^2 \geq \|q - z\|^2.$$

したがって q は z から C への最近点であり, (1) が成り立つ.

(ii) (3) の q と $y = p$ を (2) に代入すると

$$0 \geq (p - \alpha \nabla f(p) - q)^\top (p - q) = \|p - q\|^2 - \alpha \nabla f(p)^\top (p - q)$$

が得られるので, $\alpha > 0$ なので (4) を得る.

(iii) (a) $\Rightarrow$ (b) を示す: (a) と $p = P_C(p - \alpha \nabla f(p))$ は同値なので (i) より (b) が成り立つ.

(b) $\Rightarrow$ (c) を示す：任意の $x \in C \cap U$ に対し、 f の凸性と微分可能性から

$$f(x) \geq f(p) + \nabla f(p)^\top (x - p)$$

であり、(b) より $\nabla f(p)^\top (x - p) \geq 0$ なので $f(x) \geq f(p)$ となり (c) が成り立つ。

(c) $\Rightarrow$ (a) を示す：任意の $y \in C$ を取る。 U は開集合で $p \in U$ なので、十分小さい $t > 0$ に対して $p_t := p + t(y - p)$ は U に属する。また、 $p_t = (1 - t)p + ty$ であり、 C は凸なので、 $0 \leq t \leq 1$ に対して $p_t \in C$ である。したがって、十分小さい $t > 0$ について $p_t \in C \cap U$ である。 p の最適性から $f(p_t) \geq f(p)$ なので、

$$\frac{f(p + t(y - p)) - f(p)}{t} \geq 0.$$

$t \downarrow 0$ とし、 f の微分可能性を用いると $\nabla f(p)^\top (y - p) \geq 0$ であり、

$$(p - \alpha \nabla f(p) - p)^\top (y - p) = -\alpha \nabla f(p)^\top (y - p) \leq 0 \quad (\forall y \in C)$$

なので (i) より $p = P_C(p - \alpha \nabla f(p))$ である。よって、(a) が成り立つ。 $\square$

注意：第二部のスライドのアルゴリズムで、受理された点が $p^{(k+1)} = P_C(p^{(k)} - \alpha_k \nabla f(p^{(k)}))$ であるとき、

$$\frac{\|p^{(k+1)} - p^{(k)}\|}{\alpha_k} = \|\mathcal{G}_{\alpha_k}(p^{(k)})\| \quad (6)$$

が成り立つ。したがって、 $\|p^{(k+1)} - p^{(k)}\| / \alpha_k$ が小さいことは、射影勾配ステップによる更新量がステップ幅で規格化した意味で小さく、 $p^{(k)}$ が最適性条件を近似的に満たしていることを表す。

2 内部局所一様収束からエピソード収束へ（第三部スライドの演習）

凸関数列のエピソード収束と内部コンパクト集合上の一様収束との関係については、Rockafellar–Wets [2, Theorem 7.17] に一般的な結果が知られている。ここでは、可制御性スコアへの応用で現れる「共通のコンパクト凸集合上で定義された拡張実数値凸関数」という設定に限定し、必要な結果を直接証明する。

演習 2 (コンパクト凸集合上のエピソード収束定理). $C \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトな凸集合とし、 $\text{int } C \neq \emptyset$ とする。 $f^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ および $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が次を満たすと仮定する。

1. 各 $f^{(k)}$ と f はプロパーで凸な下半連続関数である。
2. $x \notin C$ ならば $f^{(k)}(x) = f(x) = +\infty$ である。
3. f は $\text{int } C$ 上で有限である。
4. $\text{int } C$ の任意のコンパクト集合 K 上で $\{f^{(k)}\}$ は f に一様収束する。すなわち、

$$\sup_{x \in K} |f^{(k)}(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

以下の小問を解くことで、 $\{f^{(k)}\}$ が f にエピソード収束することを示せ。

(i) $a \in \text{int } C$ を固定し、 $0 \leq t < 1$ に対して

$$C_t := (1 - t)a + tC (= \{(1 - t)a + tc \mid c \in C\}) \quad (7)$$

と定める。 C_t はコンパクトであり、 $C_t \subset \text{int } C$ が成り立つことを示せ。

(ii) (i) と同じ $a \in \text{int } C$ を固定し, $x \in C$ に対して

$$x_t := (1-t)a + tx \quad (0 \leq t < 1)$$

とおく. このとき

$$f(x_t) \longrightarrow f(x) \quad (t \uparrow 1) \quad (8)$$

が成り立つことを示せ.

注意: 境界で連続性がなくても, 境界点 x の関数値 $f(x)$ を内部点から x へ向かう方向の点 x_t の関数値 $f(x_t)$ の極限として再現できることを表している. この性質は (v) で境界点に対する回復列を構成するときに利用可能である.

(iii) $x \in C$ として, $x^{(k)} \rightarrow x$ を満たす $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^{(k)}\}$ で, 十分大きい k について $x^{(k)} \in C$ であるものを考える. $a \in \text{int } C$ を一つ固定し, さらに $t \in (0, 1)$ を固定して

$$x_t^{(k)} := (1-t)a + tx^{(k)}, \quad x_t := (1-t)a + tx \quad (9)$$

とおき,

$$f^{(k)}(x_t^{(k)}) \longrightarrow f(x_t), \quad f^{(k)}(a) \longrightarrow f(a) \quad (10)$$

を導け. ただし, f が $\text{int } C$ 上で有限な凸関数であることから, f は $\text{int } C$ 上で連続であるという事実を用いてよい.

(iv) 任意の $x^{(k)} \rightarrow x$ について

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \quad (11)$$

が成り立つことを示せ.

(v) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, ある $x^{(k)} \rightarrow x$ が存在して

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \leq f(x) \quad (12)$$

となることを示せ.

ヒント: x が C の境界点の場合には (ii) の結果を用いることができる.

解答 (i) $C_t = \{(1-t)a + tx \mid x \in C\}$ は, コンパクト集合 C の連続写像 $x \mapsto (1-t)a + tx$ による像なのでコンパクトである.

任意の $y \in C_t$ に対して $y \in \text{int } C$ を示す. C_t の定義より, ある $x \in C$ を用いて $y = (1-t)a + tx$ と書ける. よって, 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $y + (1-t)v = (1-t)(a+v) + tx$ である. $a \in \text{int } C$ なので, ある $r > 0$ が存在して, 中心 a , 半径 r の開球 $B(a, r) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - a\| < r\}$ は C に含まれる. すなわち, $\|v\| < r$ ならば $a + v \in B(a, r) \subset C$ であり, C の凸性から $y + (1-t)v \in C$ である. よって $B(y, (1-t)r) \subset C$ なので $y \in \text{int } C$ である.

(ii) (i) より $t < 1$ なら $x_t \in \text{int } C$ である. $x_t \rightarrow x$ であり f は下半連続なので, $f(x) \leq \liminf_{t \uparrow 1} f(x_t)$ である. 一方, $f(x) < +\infty$ なら凸性より $f(x_t) \leq (1-t)f(a) + tf(x)$ なので $\limsup_{t \uparrow 1} f(x_t) \leq f(x)$ であり, $f(x) = +\infty$ の場合にもこの不等式は自明に成り立つ. したがって (8) が成り立つ.

(iii) $a \in \text{int } C$ と $t \in (0, 1)$ を固定し, (9) のように定める. 十分大きい k では, $x^{(k)} \in C$ なので, $x_t^{(k)} \in C_t = (1-t)a + tC$ である. (i) より C_t は $\text{int } C$ のコンパクト部分集合である. したがって仮定 4 を $K = C_t$ に適用すると $\sup_{z \in C_t} |f^{(k)}(z) - f(z)| \rightarrow 0$ を得る.

また $x^{(k)} \rightarrow x$ なので $x_t^{(k)} \rightarrow x_t$ であり、十分大きい k について $x_t^{(k)} \in C_t \subset \text{int } C$ で $x_t \in C_t \subset \text{int } C$ であることと、 f は $\text{int } C$ 上で連続なことから $f(x_t^{(k)}) \rightarrow f(x_t)$ が成り立ち、

$$\begin{aligned} \left| f^{(k)}(x_t^{(k)}) - f(x_t) \right| &\leq \left| f^{(k)}(x_t^{(k)}) - f(x_t^{(k)}) \right| + \left| f(x_t^{(k)}) - f(x_t) \right| \\ &\leq \sup_{z \in C_t} \left| f^{(k)}(z) - f(z) \right| + \left| f(x_t^{(k)}) - f(x_t) \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

よって $f^{(k)}(x_t^{(k)}) \rightarrow f(x_t)$ である。さらに $a = (1-t)a + ta \in C_t$ なので、 $|f^{(k)}(a) - f(a)| \leq \sup_{z \in C_t} |f^{(k)}(z) - f(z)| \rightarrow 0$ 。したがって (10) が得られる。

(iv) 任意の $x^{(k)} \rightarrow x$ をとる。

まず $x \notin C$ なら、 C は閉集合なので $\text{dist}(x, C) > 0$ である。 $x^{(k)} \rightarrow x$ より十分大きい k で $x^{(k)} \notin C$ となり、仮定 2 から $f^{(k)}(x^{(k)}) = +\infty = f(x)$ である。したがって $\liminf$ 条件は成り立つ。

以下 $x \in C$ とし、 $L := \liminf_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)})$ とおく。 $L = +\infty$ ならば (11) が成り立つので、以下では $L < +\infty$ とする。

まず、下極限の定義より

$$f^{(k_j)}(x^{(k_j)}) \rightarrow L \quad (j \rightarrow \infty)$$

を満たす部分列 $\{x^{(k_j)}\}$ を取ることができる。この部分列について添字を付け直すことにより、

$$\begin{cases} f^{(k)}(x^{(k)}) \rightarrow L, \\ x^{(k)} \in C \quad (\text{十分大きい } k \text{ について}) \end{cases} \quad (13)$$

としてよいことに注意する（後者は $L < +\infty$ と仮定 2 より従う）。(iii) の (9) のように $x_t^{(k)}$ と x_t を定めると、 $f^{(k)}$ の凸性から $f^{(k)}(x_t^{(k)}) \leq (1-t)f^{(k)}(a) + tf^{(k)}(x^{(k)})$ なので、 $k \rightarrow \infty$ とすると、(13) と (10) より、 $f(x_t) \leq (1-t)f(a) + tL$ となり、 $t \uparrow 1$ とすると (ii) より (11) を満たす。

(v) $x \in \mathbb{R}^n$ を固定する。三つの場合に分ける。

1. $f(x) = +\infty$ の場合。 $\limsup_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) \leq +\infty$ を満たすので定数列 $x^{(k)} := x$ は回復列である。

2. $x \in \text{int } C$ の場合：一点集合 $\{x\}$ は $\text{int } C$ のコンパクト部分集合なので、仮定 4 から $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = f(x)$ なので定数列 $x^{(k)} := x$ は回復列である。

3. $x \in \text{bdry } C$ かつ $f(x) < +\infty$ の場合： $a \in \text{int } C$ を固定する。(ii) より $t_j \uparrow 1$ を適切に選んで

$$x_j := (1-t_j)a + t_jx \in \text{int } C, \quad x_j \rightarrow x, \quad |f(x_j) - f(x)| \leq \frac{1}{j}$$

とできる。各 j を固定すると、一点集合 $\{x_j\} \subset \text{int } C$ はコンパクトなので仮定 4 から

$$f^{(k)}(x_j) \rightarrow f(x_j) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (14)$$

である。したがって、狭義単調増加な整数列 N_j を選んで

$$k \geq N_j \implies \left| f^{(k)}(x_j) - f(x_j) \right| \leq \frac{1}{j}$$

とできる。 $N_j \leq k < N_{j+1}$ を満たす j を $j(k)$ とおき、

$$x^{(k)} := x_{j(k)} \quad (15)$$

と定める． $k < N_1$ の有限個の項は任意に定めてよい． $k \rightarrow \infty$ ならば $j(k) \rightarrow \infty$ なので

$$x^{(k)} = x_{j(k)} \longrightarrow x \quad (k \rightarrow \infty).$$

さらに

$$\begin{aligned} \left| f^{(k)}(x^{(k)}) - f(x) \right| &\leq \underbrace{\left| f^{(k)}(x_{j(k)}) - f(x_{j(k)}) \right|}_{k \text{ 方向の誤差}} + \underbrace{\left| f(x_{j(k)}) - f(x) \right|}_{j \text{ 方向の誤差}} \\ &\leq \frac{2}{j(k)} \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (16)$$

よって $x^{(k)}$ は x に対する回復列である． □

注意：(v) の回復列の構成では，

$$x_j \longrightarrow x, \quad f(x_j) \longrightarrow f(x) \quad (j \rightarrow \infty)$$

である一方，各 j を固定したときに

$$f^{(k)}(x_j) \longrightarrow f(x_j) \quad (k \rightarrow \infty)$$

であることを用いている．ここには $j \rightarrow \infty$ と $k \rightarrow \infty$ という二つの極限が現れている．そこで (15) とおくと，(16) の右辺第 2 項を 0 に近づけるには $j(k) \rightarrow \infty$ とすればよい．一方，右辺第 1 項について分かっているのは，各固定した j に対して (14) という収束である．したがって，各 j について，ある閾値 $\hat{N}_j$ を

$$k \geq \hat{N}_j \implies \left| f^{(k)}(x_j) - f(x_j) \right| \leq \frac{1}{j} \quad (17)$$

となるように選ぶことができる．よって $j = j(k)$ を選ぶ際には，単に $j(k) \rightarrow \infty$ とするだけでなく，その $j(k)$ に対する誤差評価 (17) が成り立つように $k \geq \hat{N}_{j(k)}$ も満たす必要がある．

閾値を

$$N_1 := \hat{N}_1, \quad N_j := \max\{\hat{N}_j, N_{j-1} + 1\} \quad (j \geq 2)$$

と取り直すことにより， $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$ としてよい．そして

$$N_j \leq k < N_{j+1} \implies j(k) := j$$

と定めると

$$j(k) \rightarrow \infty, \quad k \geq N_{j(k)} \quad (18)$$

が成り立ち， $\left| f^{(k)}(x_{j(k)}) - f(x_{j(k)}) \right| \leq \frac{1}{j(k)} \longrightarrow 0$ が保証される．

つまり，この**対角選択** (k に応じて $j = j(k)$ を選び， $j \rightarrow \infty$ と $k \rightarrow \infty$ に関する二つの収束を，同じ $k \rightarrow \infty$ のもとで同時に実現する操作をいう) では， j を 1 つ大きくする前に，その j に対する k 方向の収束が十分進むのを待つように $j(k)$ を選んでいる．その結果，

$$x_{j(k)} \longrightarrow x, \quad f^{(k)}(x_{j(k)}) \longrightarrow f(x)$$

という二つの要求を一つの列で同時に満たすことができる．

なお， $j(k) = k$ のようにすると，固定 j に対する k 方向の収束が追いつかない可能性がある．したがって，ここで必要なのは単なる $j(k) \rightarrow \infty$ ではなく，(18) を満たすような「十分ゆっくり増加する」対角選択である．

3 近似最小解の収束（第三部スライドの演習）

エピソードから最小値および近似最小解の収束を導く一般的な結果として、Rockafellar–Wets [2, Theorem 7.33] がある。ここではすべての目的関数が共通のコンパクト集合 C の外で $+\infty$ となるため、このコンパクト性を直接利用して必要な結果を証明する。

演習 3 (コンパクト集合上の最小値・最小解の収束). $C \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト集合とする. $f^{(k)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ および $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ について、次を仮定する.

1. 各 $f^{(k)}$ と f はプロパーな下半連続関数である.
2. $x \notin C$ ならば $f^{(k)}(x) = f(x) = +\infty$ である.
3. $\{f^{(k)}\}$ は f にエピソード収束する.

各 k について $m_k := \min_{x \in C} f^{(k)}(x)$ を定め、 $m := \min_{x \in C} f(x)$ とおく^{*1}. また、 $\varepsilon^{(k)} \geq 0$, $\varepsilon^{(k)} \rightarrow 0$ とし、

$$f^{(k)}(x^{(k)}) \leq m_k + \varepsilon^{(k)} \quad (19)$$

を満たす列 $\{x^{(k)}\}$ を取る. 以下を示す.

- (i) $m_k \rightarrow m$ が成り立つ.
- (ii) $\{x^{(k)}\}$ の任意の集積点は $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ の元である.
- (iii) $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \{x^*\} \implies x^{(k)} \rightarrow x^*$ である.

解答 (19) より $f^{(k)}(x^{(k)}) < +\infty$ なので、仮定 2 から任意の k で $x^{(k)} \in C$ である.

(i) まず $\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k \leq m$ を示す. $x^* \in \arg \min f$ を一つ取る. エピソード収束の回復列条件より、ある $y^{(k)} \rightarrow x^*$ が存在して $\limsup_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(y^{(k)}) \leq f(x^*) = m$ となる. $m_k \leq f^{(k)}(y^{(k)})$ なので、 $\limsup_{k \rightarrow \infty} m_k \leq m$ が成り立つ.

次に $m \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} m_k$ を示す. 各 k について $z^{(k)} \in \arg \min f^{(k)}$ を取る. $\liminf m_k$ を実現する部分列を取り、さらに C のコンパクト性を用いて部分列を取り直すことにより、

$$z^{(k_j)} \rightarrow \bar{z} \in C, \quad m_{k_j} \rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} m_k$$

としてよい^{*2}. エピソード収束の $\liminf$ 条件より

$$m \leq f(\bar{z}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} f^{(k_j)}(z^{(k_j)}) = \liminf_{j \rightarrow \infty} m_{k_j} = \liminf_{k \rightarrow \infty} m_k$$

である.

^{*1} 各 $f^{(k)}$ および f は仮定より C 上で有限な最小値を達成することに注意する (コンパクト集合上の下半連続関数に対する Weierstrass の定理より).

^{*2} $m_{k_j} \rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} m_k$ であっても、対応する $\{z^{(k_j)}\}$ が収束するとは限らない. 例えば、 $C = [-1, 1]$ として

$$f^{(k)}(x) = f(x) := \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C \end{cases}$$

とする. このとき $f^{(k)} = f$ なので $f^{(k)}$ は f にエピソード収束し、 $m_k = 0$ である. 一方、 $z^{(k)} := (-1)^k \in \arg \min f^{(k)}$ と選べば、 $\{z^{(k)}\}$ は収束しない.

以上より (i) が成り立つ。

(ii) $\bar{x}$ を $\{x^{(k)}\}$ の任意の集積点とし、ある部分列について $x^{(k_j)} \rightarrow \bar{x}$ とする。 $x^{(k)} \in C$ であり C は閉なので、 $\bar{x} \in C$ である。

エピソード収束の $\liminf$ 条件、近似最小性 (19)、および (i) より、

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} f^{(k_j)}(x^{(k_j)}) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} f^{(k_j)}(x^{(k_j)}) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} (m_{k_j} + \varepsilon^{(k_j)}) = m.$$

一方、 $m \leq f(\bar{x})$ なので $f(\bar{x}) = m$ であり、 (ii) が成り立つ。

(iii) $\arg \min f = \{x^*\}$ とする。もし $x^{(k)} \not\rightarrow x^*$ なら、ある $\delta > 0$ と部分列 $\{k_j\}$ が存在して $\|x^{(k_j)} - x^*\| \geq \delta$ となる。 C はコンパクトなので、さらに部分列を取って $x^{(k_j)} \rightarrow \hat{x} \in C$ とできる。

(ii) より $\hat{x} \in \arg \min f = \{x^*\}$ であるため $\hat{x} = x^*$ でなければならない。しかし距離の連続性から $\|\hat{x} - x^*\| \geq \delta$ となり矛盾する。よって (iii) が成り立つ。 $\square$

4 可制御性スコアへの応用：有限時間から無限時間へ

ここまでの演習では、内部コンパクト集合上の局所一様収束からエピソード収束を導く方法と、エピソード収束から最小値・最小解の収束を導く方法を確認した。ここからは、これらの一般論が第三部の無限時間可制御性スコアの解析にどのように現れるかを説明する。

第三部で考える問題は、有限時間 $T > 0$ に対して定義される可制御性スコアが

$$T \rightarrow \infty$$

でどのような極限を持つか、という問題である。単に有限時間の可制御性グラミアンに $T = \infty$ を代入するだけでは、不安定系ではグラミアンが発散するため、この問題を扱うことはできない。そこで、まずモードごとに適切なスケーリングを行い、その後でエピソード収束を用いて最適解の極限を解析する。

4.1 有限時間の可制御性スコアリング問題

標準単体を

$$\Delta_n := \left\{ p = (p_i) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

とする。

可制御性スコアでは

$$B(p) := \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$$

として

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(p)u(t)$$

を考える。このとき有限時間 $T > 0$ の可制御性グラミアンは

$$W(p, T) := \int_0^T \exp(At) B(p) B(p)^* \exp(A^*t) dt \quad (20)$$

である。 $B(p) B(p)^* = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ であることから、 $W(p, T)$ は p についてアフィンであり、

$$W(p, T) = \sum_{i=1}^n p_i W_i(T), \quad W_i(T) := W(e_i, T) \quad (21)$$

と書ける.

有限時間 VCS と AECS は, それぞれ

$$\min_{p \in \Delta_n, W(p, T) \succ O} -\log \det W(p, T), \quad (22)$$

$$\min_{p \in \Delta_n, W(p, T) \succ O} \text{tr}(W(p, T)^{-1}) \quad (23)$$

の最適解として定義される.

4.2 なぜ $T \rightarrow \infty$ をそのまま考えられないのか

A が Hurwitz であれば,

$$W(p, T) \longrightarrow \int_0^\infty \exp(At) B(p) B(p)^* \exp(A^*t) dt$$

という通常の無限時間可制御性グラミアンを考えることができる.

しかし, A に中立安定モードや不安定モードが存在すると, 一般には

$$\|W(p, T)\| \longrightarrow \infty \quad (T \rightarrow \infty)$$

となる. したがって, 不安定系を含めて $T \rightarrow \infty$ を議論するには, 各モードの増大率を取り除く必要がある.

ここで重要なのは, 可制御性グラミアンそのものに有限な極限がなくても, そのグラミアンを用いて定義された最適化問題の最適解には極限が存在するという点である. 可制御性スコアはグラミアンの値そのものではなく, グラミアンを含む最適化問題の最適解として定義されているためである.

4.3 モードごとのスケーリング

第三部スライドと同様に, 以下では説明を簡単にするため A は対角化可能であるとする. 固有値を実部の符号に応じて並べ,

$$Q^{-1} A Q = \text{diag}(\Lambda_-, \Lambda_0, \Lambda_+)$$

とする. ここで

$$\text{Re } \lambda < 0 \quad (\lambda \in \Lambda_-), \quad \text{Re } \lambda = 0 \quad (\lambda \in \Lambda_0), \quad \text{Re } \lambda > 0 \quad (\lambda \in \Lambda_+)$$

である. 以降では, それぞれのモードの次元を n_-, n_0, n_+ とする.

安定モードは時間とともに減衰するのでスケーリングする必要はない. 一方, 中立安定モードではグラミアンは T のオーダーで増大し, 不安定モードでは指数関数的に増大する. そこで, これらの増大率を取り除くためのスケーリング行列 $D(T)$ を導入する.

行列 A が対角化可能な場合には, 第三部スライドで示したように, 概念的には

$$D(T) = \text{diag} \left(I_{n_-}, T^{1/2} I_{n_0}, D_+(T) \right), \quad (24)$$

と考えればよい. ここで $D_+(T)$ は不安定固有値に対応する指数増大 $e^{\lambda T}$ を並べた対角行列である.

この $D(T)$ を用いて, スケーリング後の可制御性グラミアンを

$$\widehat{W}(p, T) := D(T)^{-1} Q^{-1} W(p, T) Q^{-*} D(T)^{-*} \quad (25)$$

と定める.

このスケーリングによって、各モードの主要な時間増大率が除かれる. [1, Theorem 1] より、スケーリング後の可制御性グラミアンは収束し、

$$\widehat{W}(p, T) \longrightarrow W_\infty(p) := \text{diag}(W_-(p), W_0(p), W_+(p)) \quad (T \rightarrow \infty) \quad (26)$$

が成り立つ. ここで $W_-(p)$, $W_0(p)$, $W_+(p)$ は、それぞれ安定モード、中立安定モード、不安定モードに対応する極限グラミアンである.

注意：参考文献 [1] では、 A が対角化可能とは限らない場合も扱っている. その場合、中立安定モードの Jordan ブロックに対しては $T^{1/2}$ だけでなく Jordan ブロックの大きさに応じた T のべきによるスケーリングが必要になる. 第三部スライドでは、この技術的な部分を避けて対角化可能な場合を用いて本質だけを説明している.

4.4 スケーリングしても有限時間のスコアは変わらない

VCS と AECS については、スケーリングは有限時間の最適解を変えずに、 $T \rightarrow \infty$ を扱いやすい形へ書き換えているだけである. 実際に、(25) から $W(p, T) = QD(T)\widehat{W}(p, T)D(T)^*Q^*$ なので、VCS に関する目的関数は

$$-\log \det W(p, T) = -\log \det \widehat{W}(p, T) - \log \det (QD(T)D(T)^*Q^*) \quad (27)$$

であり、右辺第 2 項は p に依存しない. さらに、AECS に関する目的関数は

$$\text{tr}(W(p, T)^{-1}) = \text{tr}(Q^{-*}D(T)^{-*}\widehat{W}(p, T)^{-1}D(T)^{-1}Q^{-1}) \quad (28)$$

である.

これより、以下で極限を調べる対象はスケーリング後の問題であるが、その最適解は元の有限時間 VCS・AECS そのものである.

4.5 数列による $T \rightarrow \infty$ の特徴付け

以下では、 $T \rightarrow \infty$ における極限を、数列を用いて調べる. すなわち、 $T_k > 0$ かつ $T_k \rightarrow \infty$ を満たす任意の数列 $\{T_k\}_{k \geq 1}$ を固定し、 $k \rightarrow \infty$ における極限を考える. これは一般性を失わない. 実際、距離空間 X に値をとる写像 $z: (0, \infty) \rightarrow X$ に対して、 $z(T) \rightarrow z_\infty$ ($T \rightarrow \infty$) であることと、任意の数列 $\{T_k\}_{k \geq 1} \subset (0, \infty)$, $T_k \rightarrow \infty$ に対して $z(T_k) \rightarrow z_\infty$ ($k \rightarrow \infty$) となることは同値である.

実際、前者から後者が従うことは明らかである. 逆に、 $z(T) \rightarrow z_\infty$ でないとすると、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $M > 0$ に対して $T \geq M$, $d(z(T), z_\infty) \geq \varepsilon$ を満たす T を取ることができる. そこで、各 k についてこのような $T_k \geq k$ を選べば、 $T_k \rightarrow \infty$ であるにもかかわらず $z(T_k) \not\rightarrow z_\infty$ となり、仮定に矛盾する.

5 点ごとのグラミアン収束から一様収束へ

エピソードの一般論を使うためには、 $\text{int } \widetilde{\Delta}_n$ のコンパクト集合上で目的関数が一様収束することを示したい. その第一段階として、まずスケーリング後グラミアンの一様収束を確認する.

5.1 可制御性グラミアンのアフィン性が重要

$\widehat{W}(p, T)$ も $W_\infty(p)$ も p についてアフィンなので,

$$\widehat{W}(p, T) = \sum_{i=1}^n p_i \widehat{W}_i(T), \quad W_\infty(p) = \sum_{i=1}^n p_i W_{i,\infty}$$

と書ける. ただし,

$$\widehat{W}_i(T) := \widehat{W}(e_i, T), \quad W_{i,\infty} := W_\infty(e_i).$$

任意の $T_k \rightarrow \infty$ を取る. 各 i について $\widehat{W}_i(T_k) \rightarrow W_{i,\infty}$ であるから, $i = 1, \dots, n$ が有限個であることより

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\| \widehat{W}_i(T_k) - W_{i,\infty} \right\|_2 \rightarrow 0$$

となり, さらに任意の $p \in \Delta_n$ について

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{W}(p, T_k) - W_\infty(p) \right\|_2 &= \left\| \sum_{i=1}^n p_i (\widehat{W}_i(T_k) - W_{i,\infty}) \right\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n p_i \left\| \widehat{W}_i(T_k) - W_{i,\infty} \right\|_2 \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \widehat{W}_i(T_k) - W_{i,\infty} \right\|_2 \end{aligned}$$

なので

$$\sup_{p \in \Delta_n} \left\| \widehat{W}(p, T_k) - W_\infty(p) \right\|_2 \rightarrow 0. \quad (29)$$

ここで重要なのは, 有限個の頂点 e_i での収束だけを確認すれば, p に関するアフィン性によって単体全体での一様収束が得られるということである. この性質が, 可制御性スコアの解析を大きく簡単になっている.

5.2 内部コンパクト集合では正定値性に一様な余裕がある

Δ_n は $\mathbb{R}^n$ では内部を持たないので, 第三部スライドと同様に

$$\widetilde{\Delta}_n := \left\{ \tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \tilde{p}_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i \leq 1 \right\}$$

を用いる. 写像

$$\varphi(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}) := \left(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i \right)$$

は $\widetilde{\Delta}_n$ から Δ_n への同相写像である. 特に

$$\text{int } \widetilde{\Delta}_n = \left\{ \tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \tilde{p}_i > 0, \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i < 1 \right\}$$

であり,

$$\tilde{p} \in \text{int } \widetilde{\Delta}_n \implies \varphi(\tilde{p})_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

$K \subset \text{int } \tilde{\Delta}_n$ を任意のコンパクト集合とし,

$$H_k(\tilde{p}) := \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k), \quad H(\tilde{p}) := W_\infty(\varphi(\tilde{p}))$$

とおくと, (29) から

$$r_k := \sup_{\tilde{p} \in K} \|H_k(\tilde{p}) - H(\tilde{p})\|_2 \longrightarrow 0. \quad (30)$$

$\tilde{p} \in \text{int } \tilde{\Delta}_n$ なら, $\varphi(\tilde{p}) \in \Delta_n$ の全成分は正なので, [1, Lemma 3] より $H(\tilde{p}) = W_\infty(\varphi(\tilde{p})) \succ O$ であり, $\tilde{p} \mapsto \lambda_{\min}(H(\tilde{p}))$ はコンパクト集合 K 上の正值連続関数なので

$$\eta_K := \min_{\tilde{p} \in K} \lambda_{\min}(H(\tilde{p})) > 0 \quad (31)$$

である. ここで Hermite 行列に対する Weyl の不等式

$$|\lambda_{\min}(H_k(\tilde{p})) - \lambda_{\min}(H(\tilde{p}))| \leq \|H_k(\tilde{p}) - H(\tilde{p})\|_2 \quad (32)$$

を用いると, $\lambda_{\min}(H(\tilde{p})) \geq \eta_K$ であり, また r_k の定義 (30) から十分大きい k では $\|H_k(\tilde{p}) - H(\tilde{p})\|_2 \leq r_k \leq \frac{\eta_K}{2}$ であることより,

$$\lambda_{\min}(H_k(\tilde{p})) \geq \lambda_{\min}(H(\tilde{p})) - \|H_k(\tilde{p}) - H(\tilde{p})\|_2 \geq \eta_K - r_k \geq \frac{\eta_K}{2}.$$

以上より, ある $\eta_K > 0$ が存在して, 十分大きい k について

$$H_k(\tilde{p}) \succeq \frac{\eta_K}{2} I, \quad H(\tilde{p}) \succeq \eta_K I \quad (\tilde{p} \in K) \quad (33)$$

が成り立つ. つまり, 単体の境界から正の距離だけ離れた内部コンパクト集合上では, 有限時間グラミアンと極限グラミアンは特異行列から一様に離れている. この

一様な正定値余裕

が, VCS と AECS の両方に共通する重要な評価である.

注意: 単体の境界では, 一部の p_i が 0 になる. すると対応する入力方向が失われるため, $W_\infty(p)$ が特異になる可能性がある. そのため $\lambda_{\min}(W_\infty(p))$ を Δ_n 全体で正の定数によって下から抑えることは一般にはできない. 特に, $\log \det$ や逆行列は特異行列の近くで急激に変化するため, 単体全体で直接一様収束を証明しようとするとう問題が生じる.

そこで $K \subset \text{int } \tilde{\Delta}_n$ という内部コンパクト集合上では一様収束を証明し, 境界は演習 2 で確認したエピソードの議論によって扱う. この「**内部では一様収束, 境界では回復列**」という考え方が, 第三部の解析の中心である.

6 VCS

$T_k > 0$ かつ $T_k \rightarrow \infty$ を満たす任意の数列 $\{T_k\}$ を固定する. $\mathbb{R}^{n-1}$ 上の拡張実数値関数を

$$F^{(k)}(\tilde{p}) := \begin{cases} -\log \det \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k), & \tilde{p} \in \tilde{\Delta}_n, \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k) \succ O, \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

と定める. 4.4 節で説明したように, この問題の最適解は元の有限時間 VCS と同じである.

一方、極限目的関数の候補を

$$F(\tilde{p}) := \begin{cases} -\log \det W_\infty(\varphi(\tilde{p})), & \tilde{p} \in \tilde{\Delta}_n, W_\infty(\varphi(\tilde{p})) \succ O, \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (35)$$

と定める．この F を目的関数とする問題が、無限時間 VCS の最適化問題である．

$F^{(k)}$ と F はプロパーで下半連続な凸関数である．実際、

$$\bar{g}(X) := \begin{cases} -\log \det X, & X \succ 0, \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

はプロパーな凸下半連続関数である．ここで、 $X \succ 0$ および $X \succeq 0$ は、それぞれ X が Hermite 正定値および Hermite 半正定値であることを意味する．下半連続性は、任意の $X_k \rightarrow X$ に対して $\bar{g}(X) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \bar{g}(X_k)$ を示せばよい． $X \succ 0$ では $-\log \det X$ の連続性から従う．また、 $X \not\succeq 0$ なら、Hermite 半正定値行列全体の集合は閉集合なので、十分大きい k で $X_k \not\succeq 0$ となる．したがって、 $X_k \not\succeq 0$ であり、 $\bar{g}(X_k) = +\infty = \bar{g}(X)$ である．したがって、残るのは $X \succeq 0$ が特異な場合である．このとき $\bar{g}(X) = +\infty$ であるから、 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \bar{g}(X_k) = +\infty$ を示せばよい． $X_k \not\succeq 0$ となる項では $\bar{g}(X_k) = +\infty$ であり、 $X_k \succ 0$ となる項については $\lambda_{\min}(X_k) \rightarrow 0$ である．さらに、 $X_k \rightarrow X$ なので、ある $M > 0$ が存在して $\lambda_{\max}(X_k) = \|X_k\|_2 \leq M$ が成り立ち、

$$0 < \det X_k \leq \lambda_{\min}(X_k) \lambda_{\max}(X_k)^{n-1} \leq M^{n-1} \lambda_{\min}(X_k) \rightarrow 0.$$

したがって、 $X_k \succ 0$ となる項についても $-\log \det X_k \rightarrow +\infty$ であり、 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \bar{g}(X_k) = +\infty = \bar{g}(X)$ なので $\bar{g}$ は X で下半連続である．

なお、 $-\log \det X$ は Hermite 正定値行列上で凸であり、Hermite 正定値行列全体の集合は凸集合であるから、上のように $+\infty$ と拡張した $\bar{g}$ も凸である．また、凸関数とアフィン写像の合成は凸であり、下半連続関数と連続写像の合成は下半連続である．また、 $\tilde{\Delta}_n$ は閉凸集合であるから、その表示関数

$$\delta_{\tilde{\Delta}_n}(\tilde{p}) := \begin{cases} 0, & \tilde{p} \in \tilde{\Delta}_n, \\ +\infty, & \tilde{p} \notin \tilde{\Delta}_n \end{cases}$$

は下半連続な凸関数である．したがって、下半連続な凸関数の和も下半連続な凸関数であることから、

$$F^{(k)}(\tilde{p}) = \bar{g}(\tilde{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)) + \delta_{\tilde{\Delta}_n}(\tilde{p})$$

は下半連続な凸関数であり、同様に F も下半連続な凸関数である．さらに、 $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ では対応するグラミアンが正定値であるため、 $F^{(k)}$ と F はいずれも有限値をとる点をもち、 $-\infty$ の値をとらないことと合わせて、いずれもプロパーである．

6.1 VCS の場合の一様収束性

5.2 節の (30) より、任意の $\delta > 0$ に対して、十分大きい k では

$$\|H_k(\tilde{p}) - H(\tilde{p})\|_2 < \delta \quad (\forall \tilde{p} \in K) \quad (36)$$

である．よって、 $\delta < 1$ とすると、十分大きい k では

$$\|H_k(\tilde{p})\|_2 \leq \|H(\tilde{p})\|_2 + \|H_k(\tilde{p}) - H(\tilde{p})\|_2 \leq R_K \quad (\forall \tilde{p} \in K)$$

が成り立つ。ただし、 $R_K := \max_{\tilde{p} \in K} \|H(\tilde{p})\|_2 + 1$ である。よって、 k が十分大きいとき、任意の $\tilde{p} \in K$ に対して、

$$H_k(\tilde{p}), H(\tilde{p}) \in \mathcal{M}_K := \left\{ X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X = X^*, X \succeq \frac{\eta_K}{2} I, \|X\|_2 \leq R_K \right\} \quad (37)$$

である。 $\mathcal{M}_K$ は $\mathbb{C}^{n \times n}$ の有界閉集合なので、有限次元性よりコンパクトである。また、

$$g(X) := -\log \det X$$

はコンパクト集合 $\mathcal{M}_K$ 上で連続なので $\mathcal{M}_K$ 上で一様連続である。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $X, Y \in \mathcal{M}_K$ について

$$\|X - Y\|_2 < \delta \implies |g(X) - g(Y)| < \varepsilon \quad (38)$$

が成り立つ。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ を適当に選ぶと、十分大きい k では (36) と (37) が成り立つので

$$|g(H_k(\tilde{p})) - g(H(\tilde{p}))| < \varepsilon \quad (\forall \tilde{p} \in K)$$

を得る。

K 上では

$$F^{(k)}(\tilde{p}) = g(H_k(\tilde{p})), \quad F(\tilde{p}) = g(H(\tilde{p}))$$

であり、 $\varepsilon > 0$ は任意であるから、

$$\sup_{\tilde{p} \in K} |F^{(k)}(\tilde{p}) - F(\tilde{p})| \longrightarrow 0. \quad (39)$$

したがって、 $F^{(k)}$ は F に $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ の任意のコンパクト集合上一様収束する。

6.2 VCS の場合のエピ収束と最適解の収束

$F^{(k)}$ と F はプロパーで下半連続な凸関数であり、 $\tilde{\Delta}_n$ の外では $+\infty$ である。また F は $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ 上で有限である。さらに (39) により、 $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ の任意のコンパクト集合上で $F^{(k)}$ は F に一様収束する。したがって演習 2 を適用でき、 $\{F^{(k)}\}$ は F にエピ収束する。

有限時間問題の最適解を $\tilde{p}_{\text{VCS}}^{(k)}$ とし、極限問題の最適解を $\tilde{p}_{\text{VCS}}^\infty$ とする。演習 3 より、 $\{\tilde{p}_{\text{VCS}}^{(k)}\}$ の任意の集積点は極限問題の最適解である。特に極限問題の最適解が一意なら $\tilde{p}_{\text{VCS}}^{(k)} \longrightarrow \tilde{p}_{\text{VCS}}^\infty$ であり、 φ は連続なので、元の単体座標でも $\varphi(\tilde{p}_{\text{VCS}}^{(k)}) \longrightarrow \varphi(\tilde{p}_{\text{VCS}}^\infty)$ である。

任意の数列 $T_k \rightarrow \infty$ に対してこの議論が成り立つため、これは有限時間 VCS が $T \rightarrow \infty$ で無限時間 VCS へ収束することを表している。

7 AECS

$T_k > 0$ かつ $T_k \rightarrow \infty$ を満たす任意の数列 $\{T_k\}$ を固定する。 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上の拡張実数値関数を

$$G^{(k)}(\tilde{p}) := \begin{cases} \text{tr} \left(Q^{-*} D(T_k)^{-*} \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)^{-1} D(T_k)^{-1} Q^{-1} \right), & \tilde{p} \in \tilde{\Delta}_n, \\ & \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k) \succ O, \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (40)$$

とする。4.4 節で説明したように、この問題の最適解は元の有限時間 AECS と同じである。

スケーリング行列の定義 (24) から

$$E_k := D(T_k)^{-1} \longrightarrow P_- := \text{diag}(I_{n_-}, O, O) \quad (41)$$

である。ただし、少なくとも一つ安定モードが存在すると仮定する。つまり、以下では $n_- > 0$ の場合を考える。

(26) と (41) より、形式的に（これは形式的な議論であり、以下の**注意**で述べるように、 Δ_n の境界では一般的には正しくない）

$$E_k^* \widehat{W}(p, T_k)^{-1} E_k \longrightarrow P_- W_\infty(p)^{-1} P_- = \text{diag}(W_-(p)^{-1}, O, O)$$

となる。したがって極限目的関数の候補を

$$G(\tilde{p}) := \begin{cases} \text{tr}(Q^{-*} \text{diag}(W_-(\varphi(\tilde{p}))^{-1}, O, O) Q^{-1}), & \tilde{p} \in \tilde{\Delta}_n, \\ & W_-(\varphi(\tilde{p})) \succ O, \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (42)$$

と定める。AECS の極限目的関数には、VCS の場合と異なり、 $W_0(p)$ と $W_+(p)$ が現れない。

$G^{(k)}$ と G はプロパーで下半連続な凸関数である。実際、任意の $C \succ O$ に対して

$$h_C(X) := \begin{cases} \text{tr}(CX^{-1}), & X \succ O, \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

はプロパーで下半連続な凸関数である。ここで、 $X \succ O$ および $X \succeq O$ は、それぞれ X が Hermite 正定値および Hermite 半正定値であることを意味する。下半連続性は、任意の $X_j \rightarrow X$ に対して $h_C(X) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} h_C(X_j)$ を示せばよい。 $X \succ O$ では $X \mapsto \text{tr}(CX^{-1})$ の連続性から従う。また、 $X \not\succ O$ なら、Hermite 半正定値行列全体の集合は閉集合なので、十分大きい j で $X_j \not\succ O$ となる。したがって、 $X_j \not\succ O$ であり、 $h_C(X_j) = +\infty = h_C(X)$ である。

したがって、残るのは $X \succeq O$ が特異な場合である。このとき $h_C(X) = +\infty$ であるから、 $\liminf_{j \rightarrow \infty} h_C(X_j) = +\infty$ を示せばよい。 $X_j \not\succ O$ となる項では $h_C(X_j) = +\infty$ であり、 $X_j \succ O$ となる項については $\lambda_{\min}(X_j) \rightarrow 0$ である。さらに、 $C \succ O$ なので、

$$h_C(X_j) = \text{tr}(CX_j^{-1}) \geq \lambda_{\min}(C) \text{tr}(X_j^{-1}) \geq \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\min}(X_j)} \rightarrow +\infty.$$

したがって、 $X_j \succ O$ となる項についても $h_C(X_j) \rightarrow +\infty$ であり、 $\liminf_{j \rightarrow \infty} h_C(X_j) = +\infty = h_C(X)$ なので h_C は X で下半連続である。なお、 $X \mapsto \text{tr}(CX^{-1})$ は Hermite 正定値行列上で凸であり、Hermite 正定値行列全体の集合は凸集合であるから、上のように $+\infty$ と拡張した h_C も凸である。

一方、 $C_k := E_k Q^{-1} Q^{-*} E_k^* \succ O$ とおけば、トレースの巡回性より

$$G^{(k)}(\tilde{p}) = \text{tr}(C_k \widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)^{-1}).$$

また、 Q は可逆なので $Q^{-1} Q^{-*} \succ O$ で、正定値行列の任意の主部分行列も正定値であるから、 $Q^{-1} Q^{-*}$ の安定モードに対応する主部分行列を C_- とおけば、 $C_- \succ O$ であり、

$$G(\tilde{p}) = \text{tr}(C_- W_-(\varphi(\tilde{p}))^{-1}).$$

$\tilde{p} \mapsto \widetilde{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)$ および $\tilde{p} \mapsto W_-(\varphi(\tilde{p}))$ はいずれもアフィンなので、凸関数とアフィン写像の合成が凸であり、下半連続関数と連続写像の合成が下半連続であることから、

$$G^{(k)}(\tilde{p}) = h_{C_k}(\widetilde{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)) + \delta_{\tilde{\Delta}_n}(\tilde{p}), \quad G(\tilde{p}) = h_{C_-}(W_-(\varphi(\tilde{p}))) + \delta_{\tilde{\Delta}_n}(\tilde{p})$$

は下半連続な凸関数である。さらに、 $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ では対応するグラミアンが正定値であるため、 $G^{(k)}$ と G はいずれも有限値をとる点を持ち、 $-\infty$ の値をとらないことと合わせて、いずれもプロパーである。

注意： Δ_n の境界点 p では $W_-(p) \succ O$ であっても、 $W_\infty(p)$ 全体が正定値とは限らない。その場合、 $\widehat{W}(p, T_k)^{-1}$ の成分が発散する可能性があり、 $D(T_k)^{-1}$ の消えていく成分がその発散を必ず打ち消すとは限らない。例えば

$$E(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}, \quad W(T) = \begin{pmatrix} 1 & T^{-1} \\ T^{-1} & T^{-2} + T^{-4} \end{pmatrix}$$

とすると

$$W(T) \succ O, \quad W(T) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが、

$$E(T)^* W(T)^{-1} E(T) = \begin{pmatrix} T^2 + 1 & -T^2 \\ -T^2 & T^2 \end{pmatrix}$$

となり、 $T \rightarrow \infty$ で発散する。この例は、 $W_-(p) \succ O$ という情報だけから $E_k^* \widehat{W}(p, T_k)^{-1} E_k$ の点ごとの収束を結論してはいけないことを表している。

7.1 AECS の場合の一樣収束性

5.2 節の (33) より

$$\|H_k(\tilde{p})^{-1}\|_2 \leq \frac{2}{\eta_K}, \quad \|H(\tilde{p})^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{\eta_K} \quad (\tilde{p} \in K) \quad (43)$$

を得る。さらに、逆行列の差に関する恒等式 $H_k^{-1} - H^{-1} = H_k^{-1}(H - H_k)H^{-1}$ を用いると、

$$\|H_k(\tilde{p})^{-1} - H(\tilde{p})^{-1}\|_2 \leq \|H_k(\tilde{p})^{-1}\|_2 \|H_k(\tilde{p}) - H(\tilde{p})\|_2 \|H(\tilde{p})^{-1}\|_2$$

なので (30) と (43) より

$$s_k := \sup_{\tilde{p} \in K} \|H_k(\tilde{p})^{-1} - H(\tilde{p})^{-1}\|_2 \leq \frac{2}{\eta_K^2} r_k \longrightarrow 0. \quad (44)$$

つまり、内部コンパクト集合 K 上では、グラミアンだけでなくその逆行列も一樣収束する。

次に、AECS では逆行列に加えて E_k も k に依存することに注意する。(41) より、 $\{E_k\}$ は有界であり、 $M_E := \sup_k \|E_k\|_2 < +\infty$ とおくことができる。また、 $e_k := \|E_k - P_-\|_2 \longrightarrow 0$ である。

ここで

$$\Psi_k(\tilde{p}) := E_k^* H_k(\tilde{p})^{-1} E_k, \quad \Psi(\tilde{p}) := P_- H(\tilde{p})^{-1} P_- = \text{diag}(W_-(\varphi(\tilde{p}))^{-1}, O, O)$$

と定めて、両者の差を

$$\Psi_k(\tilde{p}) - \Psi(\tilde{p}) = E_k^* (H_k(\tilde{p})^{-1} - H(\tilde{p})^{-1}) E_k + (E_k^* - P_-) H(\tilde{p})^{-1} E_k + P_- H(\tilde{p})^{-1} (E_k - P_-)$$

と分解すると, $\|P_-\|_2 \leq 1$ であるから, (43) と (44) を用いて

$$\sup_{\tilde{p} \in K} \|\Psi_k(\tilde{p}) - \Psi(\tilde{p})\|_2 \leq M_E^2 s_k + \frac{M_E + 1}{\eta_K} e_k \longrightarrow 0 \quad (45)$$

を得る. したがって, 逆行列の一致収束と (41) より, Ψ_k も Ψ に K 上一様収束する.

K 上では

$$G^{(k)}(\tilde{p}) = \text{tr}(Q^{-*} \Psi_k(\tilde{p}) Q^{-1}), \quad G(\tilde{p}) = \text{tr}(Q^{-*} \Psi(\tilde{p}) Q^{-1})$$

であり, 任意の $n \times n$ 行列 A について $|\text{tr}(A)| \leq \sum_{i=1}^n |e_i^* A e_i| \leq n \|A\|_2$ であるから,

$$\left| G^{(k)}(\tilde{p}) - G(\tilde{p}) \right| = \left| \text{tr}(Q^{-*} (\Psi_k(\tilde{p}) - \Psi(\tilde{p})) Q^{-1}) \right| \leq n \|Q^{-1}\|_2^2 \|\Psi_k(\tilde{p}) - \Psi(\tilde{p})\|_2.$$

したがって (45) から

$$\sup_{\tilde{p} \in K} \left| G^{(k)}(\tilde{p}) - G(\tilde{p}) \right| \longrightarrow 0 \quad (46)$$

となるので, $G^{(k)}$ は G に $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ の任意のコンパクト集合上で一致収束する.

7.2 AECS の場合のエピ収束と最適解の収束

$G^{(k)}$ と G はプロパーで下半連続な凸関数であり, $\tilde{\Delta}_n$ の外では $+\infty$ である. また G は $\text{int } \tilde{\Delta}_n$ 上で有限であり, (46) が成り立つ. したがって演習 2 より $\{G^{(k)}\}$ は G にエピ収束する.

有限時間 AECS の最適解を $\tilde{p}_{\text{AECS}}^{(k)}$ とし, 極限問題の最適解を $\tilde{p}_{\text{AECS}}^\infty$ とする. 極限問題の最適解が一意なら, 演習 3 から $\tilde{p}_{\text{AECS}}^{(k)} \longrightarrow \tilde{p}_{\text{AECS}}^\infty$ であり, 元の単体座標でも $\varphi(\tilde{p}_{\text{AECS}}^{(k)}) \longrightarrow \varphi(\tilde{p}_{\text{AECS}}^\infty)$ が成り立つ.

8 無限時間で VCS と AECS は何を評価するのか

以上の解析から, $T \rightarrow \infty$ における VCS と AECS の違いを次の表のように理解できる.

	VCS	AECS
極限で現れるグラミアン	$W_\infty(p)$	$W_-(p)$
有限値条件	$W_\infty(p) \succ O$	$W_-(p) \succ O$
評価するモード	安定・中立安定・不安定	安定のみ

さらに, ここまでの議論を可制御性スコアに固有の解析と, 演習で示した一般論に分けて整理すると次のようになる.

解析の段階	内容
可制御性スコア固有の解析	スケーリング後グラミアン $\widehat{W}(\varphi(\tilde{p}), T_k)$ の一様収束と内部コンパクト集合上の一様な正定値余裕を用いて, VCS・AECS の目的関数の局所一様収束を導く.
演習 2	内部コンパクト集合上の目的関数の局所一様収束から, 有限時間の目的関数列が無限時間の目的関数にエピ収束することを導く.
演習 2 の (ii), (v)	境界点そのものにおける点ごとの収束を要求せず, 内部点から境界点へ近づくことによってエピ収束に必要な回復列を構成する.
演習 3	目的関数のエピ収束から, 有限時間 VCS・AECS の最適解の集積点が無限時間問題の最適解になることを導く. さらに, 無限時間問題の最適解が一意なら, 有限時間の最適解そのものが無限時間の最適解に収束する.

したがって,

$$\underbrace{\text{スケーリング後グラミアンの極限}}_{\text{可制御性スコア固有の解析}} \implies \underbrace{\text{目的関数の局所一様収束}}_{\text{演習 2}} \implies \underbrace{\text{エピ収束}}_{\text{演習 3}} \implies \underbrace{\text{最適解の収束}}_{\text{演習 3}}$$

と整理できる.

参考文献

- [1] K. Umezū and K. Sato, “Infinite-horizon controllability scores for linear time-invariant systems,” arXiv:2601.10260, 2026.
- [2] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.