

連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2026

星が見えるのは、 夜に穴があいているから

～双対について私が知っている、二三の事柄～

東京科学大学 松井 知己

時間割

松井担当講義(とポスターセッション)

1 日目: 9 月 1 日 (火)

13:00--13:05 オープニング

13:05--14:05 講義

14:15--15:15 講義

15:25--16:25 講義

16:35--17:05 演習

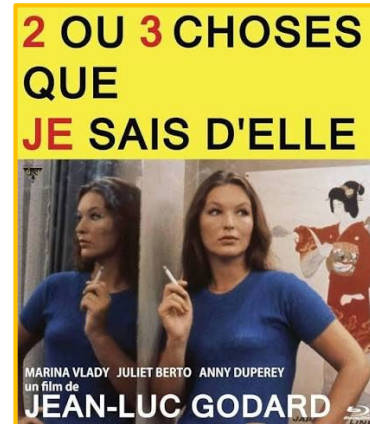
(17:20--19:00 ポスターセッション ―現地のみ―)

2 日目: 9 月 2 日 (水)

10:00--10:30 演習

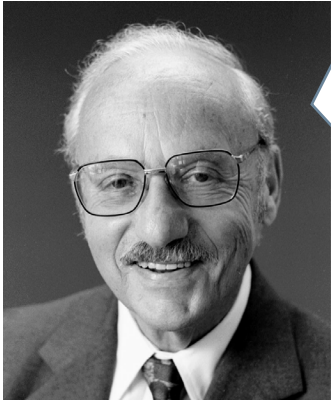
10:40--11:40 演習の発表・解説および総括

11:40--13:30 休憩



Dantzig (ダンツィク)

George Bernard Dantzig、1914年11月8日 - 2005年5月13日

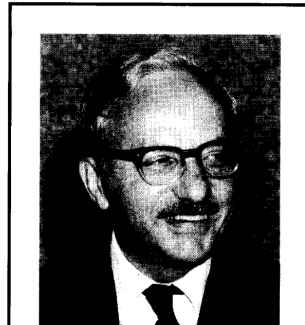


単体法の提案者として知られている。
統計理論の未解決問題を、講義に遅刻してきたダンツィクが宿題と勘違いして解いてしまったという学生時代の逸話が映画『グッド・ウィル・ハンティング』の導入シーンで使われた。

ジョージ・ダンツィク先生を悼む

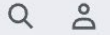
2005年5月13日、線形計画法の創始者として知られる本学会名誉会員のジョージ・ダンツィク先生が亡くなりました。昨年11月、満90歳の誕生日を祝うセレモニーが開催されたときはまだお元気で、「不現実性の下での最適化」の研究に情熱を傾けておられた。しかしその後急に体調を崩され、肝機能、腎機能低下と感染症を併発し旅立たれたという。

ダンツィク先生は、1914年に「自然の言葉：数学」の著者として知られるトビアス・ダンツィク教授を父として、米国オレゴン州で生まれた。36年にメリーランド大学を卒業、翌年ミシガン大学で修士号を得た



オペレーションズ・リサーチ, 50(7), 2005.

三 ウィキペディア



ジョージ・ダンツィーク

アメリカの数理科学者 (1914-2005)

文A



この記事の項目名には以下のような表記揺れがあります。

George Bernard Dantzig
ジョージ・バーナード・ダンツィク
ジョージ・バーナード・ダンツィーク

ジョージ・バーナード・ダンツィク（George Bernard Dantzig、1914年11月8日 - 2005年5月13日）は、アメリカの数理科学者。インダストリアル・エンジニアリング、オペレーションズ・リサーチ、計算機科学、経済学、統計学に貢献した。

ジョージ・ダンツィーク



ジェラルド・フォード（右）がジョージ・ダンツィク（左）にアメリカ国家科学賞を授与している（1976年）

生誕

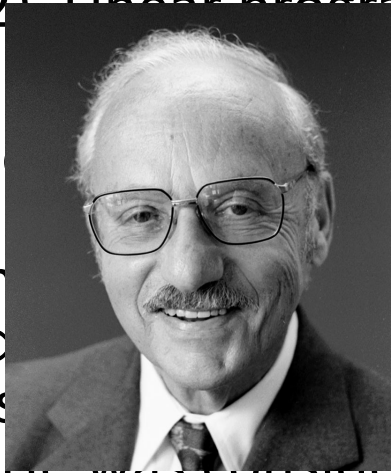
George Bernard Dantzig

1914年11月8日

アメリカ合衆国、オレゴン州、ポートランド

Dantzig ダンツィク (2002)

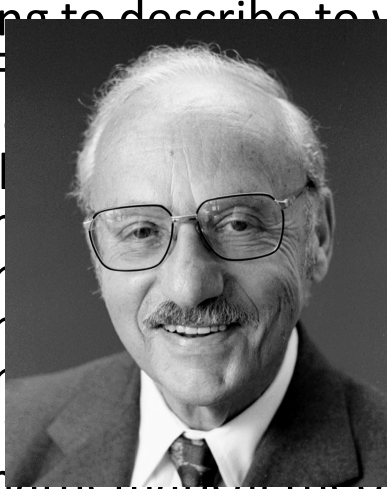
Dantzig (2002). Linear programming. Operations Research, 50(1), 42-47.



I proposed the method in the summer 1947. But it took nearly a year for my colleagues and I in the Pentagon realized just how the method really was. In the meantime, I consulted with the great, Johnny von Neumann to suggest in the way of solution techniques. He was considered by many as the leading mathematician in the world. On October 3, 1947, I met him for the first time at the Institute Advanced Study at Princeton.

私は、1947年夏に単体法を考案したものの、ペンタゴンの同僚と実用性を確信するまでに1年近くを要した。そこで、世界屈指の数学者と評されるフォン・ノイマンにアドバイスを求め、同年10月3日、プリンストン高等研究所を訪ねた。

Two black and white portraits of men. The man on the left is older, with white hair and glasses, wearing a suit and tie. The man on the right is younger, with dark hair, wearing a suit and tie. They are both looking towards the camera.



空軍の問題について、ノイマンに、普通の人に話すように説明しようとしたのを覚えている。まず、活動や品目などを用いた線形計画モデルの定式化から話を始めた。すると彼は、珍しくイライラした様子で『要点を話してくれ』と言った。短気な私は『手短に済ませたいなら、そうしてやろう』と思った。1分足らずで黒板に幾何と代数の解法を描くと、ノイマンは立ち上がり『ああ、それか！』と叫んだ。そこから1時間半、彼は線形計画法の数学的理論について語り続けた。

Dantzig ダンツィク (2002)

At one point, seeing me sitting there with my eyes popping and my mouth open (after all I had searched the literature and found nothing), von Neumann said:

その後、私が目を丸くして口を開けたまま茫然としているのを見て(何しろ文献を調べても何も見つからなかったのだから)、ノイマンはこう言った。

“I don’t want you to think I am pulling all this out of my sleeve on the spur of the moment like a magician. I have recently completed a book with Oscar Morgenstern on the theory of games. What I am doing is conjecturing that the two problems are equivalent. The theory that I am outlining is an analogue to the one we have developed for games.”

「今の話を、何もない所から手品師のようにいきなり取り出したと思わないで欲しい。私は最近 Morgenstern とゲーム理論の本を書き上げたばかりで、2つの問題が同じだと感じている。今の話は、私たちがゲーム理論のために構築してきたものとよく似ている。」

Thus I learned about Farkas’ Lemma, and about Duality for the first time. こうして私は、Farkasの補題と双対性について初めて知ることになった。

年表

1902 Farkas Gyula (ハンガリーの数学者・物理学者)

1928 von Neumann ミニマックス定理

1939 第二次世界大戦 開戦

1944 Theory of Games and Economic Behavior 1st

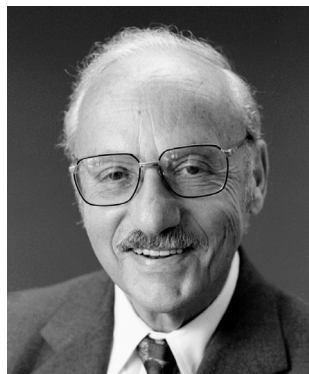
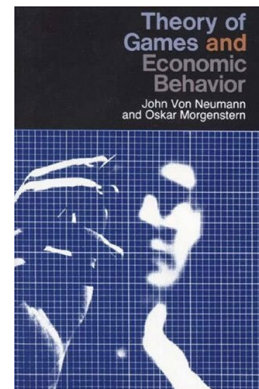
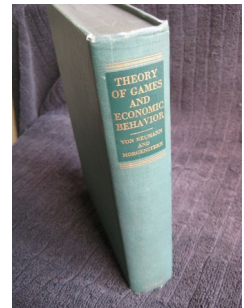
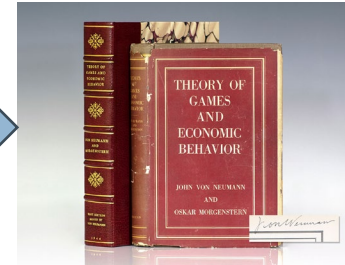
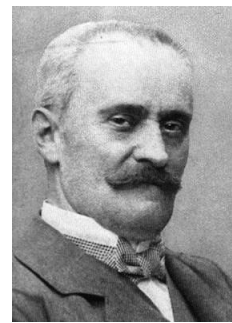
1945 第二次世界大戦 終戦

1947 Theory of Games and Economic Behavior 2nd

1947 10/3 Dantzig (32) が von Neumann (43) を訪問

1953 Theory of Games and Economic Behavior 3rd

1957 von Neumann 逝去 (53)



Dantzig



von Neumann

Farkas の補題とFredholmの択一定理

Farkasの補題(等式版)[1902]:

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

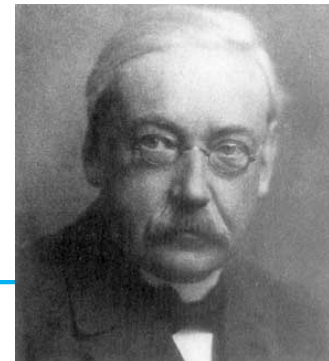
Erik Ivar Fredholm
スウェーデンの数学者
1866-1927

Fredholm's Alternative (有限次元版):
(フレドホルムの択一定理)[1900]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

$$P: Ax = b \quad D: y^T A = 0^T, y^T b \neq 0$$

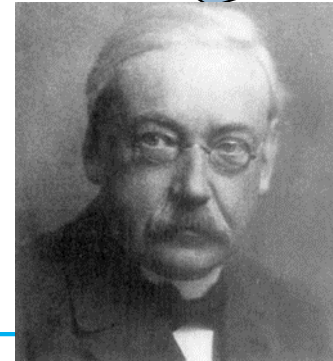
PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.



Fredholm, I. (1900). "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet" (French). *Kong. Vetenskaps-Akademiens Fbrh. Stockholm*: 39–46.

Fredholmの択一定理 (1/2)

Erik Ivar Fredholm
スウェーデンの数学者
1866-1927



Fredholm's Alternative (有限次元版):
(フレドホルムの択一定理)[1900]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

P: $Ax = b$ D: $y^T A = 0^T, y^T b \neq 0$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

下記の等式は解を持つか？

$$\begin{aligned} \text{Q1: } 20x_1 + 10x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Ans: **No**

$$\begin{array}{r} -1 \times (20x_1 + 10x_2 = 5) \\ 6 \times (3x_1 + x_2 = 1) \\ 2 \times (x_1 + 2x_2 = -2) \\ \hline 0x_1 + 0x_2 = -3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Q2: } 20x_1 + 10x_2 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

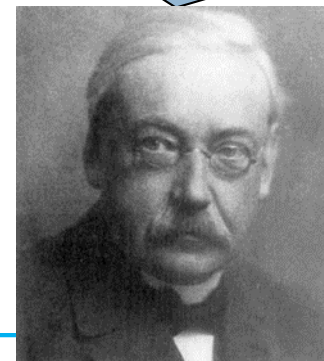
Ans: **Yes** $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{array}{r} 20 \cdot 1 + 10 \cdot (-1) = 10 \\ 3 \cdot 1 + (-1) = 2 \\ 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{array}$$

Fredholm, I. (1900). "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet" (French). *Kong. Vetenskaps-Akademiens Fbrh. Stockholm*: 39–46.

Fredholmの択一定理 (1/2)

Erik Ivar Fredholm
スウェーデンの数学者
1866-1927



Fredholm's Alternative (有限次元版):
(フレドホルムの択一定理)[1900]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

P: $Ax = b$ D: $y^T A = 0^T, y^T b \neq 0$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

PとDの両方が解を持つことはない.

Pの解 x^* とDの解が y^* 存在したと仮定.

$$Ax^* = b$$

$$y^{*T}(Ax^*) = y^{*T}b$$

$$0 = 0^T x^* = (y^{*T} A)x^* = y^{*T} b \neq 0$$

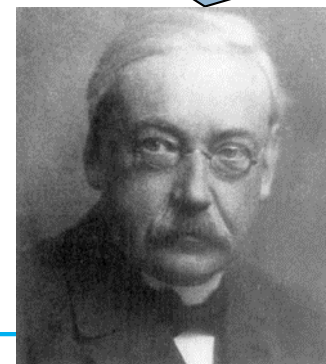
矛盾

両辺に y^* を掛ける =
等式系の「重み付き和」
を計算する

Fredholm, I. (1900). "Sur une r nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet" (French). *Kong. Vetenskaps-Akademiens Fbrh. Stockholm*: 39–46.

Fredholmの択一定理 (2/2)

Erik Ivar Fredholm
スウェーデンの数学者
1866-1927



Fredholm's Alternative (有限次元版):

(フレドホルムの択一定理)[1900]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

P: $Ax = b$ D: $y^T A = 0^T, y^T b \neq 0$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

A の列ベクトルの張る線形空間を H とする。

$$H = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, v = Ax\}$$

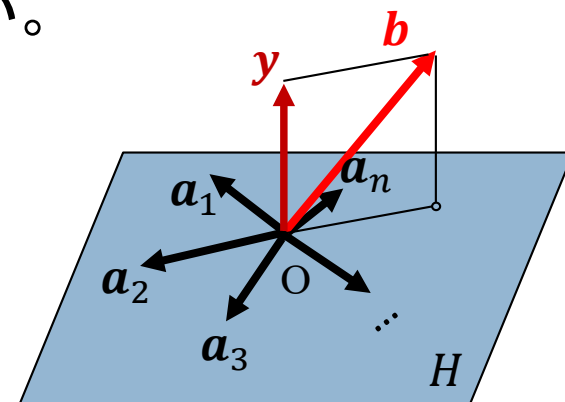
$Ax = b$ が解を持たない $\Leftrightarrow b$ が H に含まれない。

b を「 H に直交射影したベクトル」と

「 H の法線ベクトル y 」の和に分解

$y^T A = 0^T, y^T b \neq 0$ が成り立つ。

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$



Fredholm, I. (1900). "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet" (French). *Kong. Vetenskaps-Akademiens Fbrh. Stockholm*: 39–46.

Farkas の補題とFredholmの択一定理

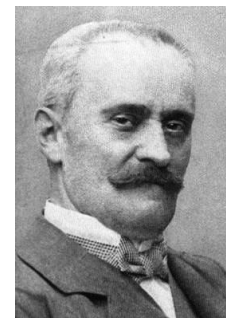
Farkas Gyula
ハンガリーの数学者
・物理学者 1847-1930

Farkasの補題(等式版):[1902]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.



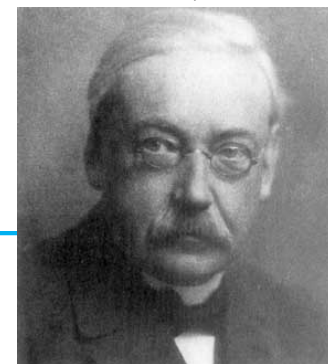
Fredholm's Alternative (有限次元版):
(フレドホルムの択一定理)[1900]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

$$P: Ax = b \quad D: y^T A = 0^T, y^T b \neq 0$$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

Erik Ivar Fredholm
スウェーデンの数学者
1866-1927



Farkas, J. (1902). Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 124, 1–27.

Farkas の補題

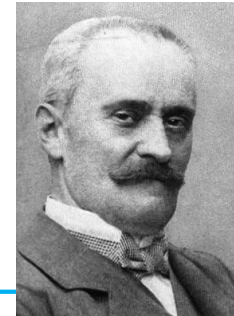
Farkas Gyula
ハンガリーの数学者
・物理学者 1847-1930

Farkasの補題(等式版):[1902]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

P: $Ax = b, x \geq 0$ D: $y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.



下記の等式・不等式系は解を持つか？

$$\begin{aligned} \text{Q1: } & 4x_1 + 3x_2 = 1 \\ & 3x_1 + x_2 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ans: **No**

$$\begin{array}{rcl} 1 \times (4x_1 + 3x_2 = 1) & & \\ -1 \times (3x_1 + x_2 = 2) & & \\ 0 \times (2x_1 + 2x_2 = 0) & & \\ \hline 1x_1 + 2x_2 = -1 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Q2: } & 4x_1 + 3x_2 = 7 \\ & 3x_1 + x_2 = 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ans: **Yes** $(x_1, x_2) = (1, 1) \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7 & & \\ 3 \cdot 1 + 1 = 4 & & \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4 & & \end{array}$$

Farkas, J. (1902). Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 124, 1–27.

Farkas の補題

Farkas Gyula

ハンガリーの数学者

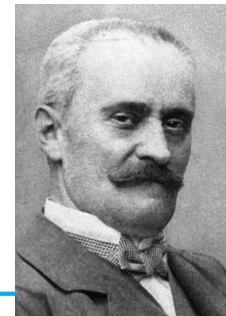
・物理学者 1847-1930

Farkasの補題(等式版):[1902]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

P: $Ax = b, x \geq 0$ D: $y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.



PとDの両方が解を持つことはない.

Pの解 x^* とDの解が y^* 存在したと仮定.

$$Ax^* = b$$

$$y^{*T}(Ax^*) = y^{*T}b$$

$$0 \leq (y^{*T}A)x^* = y^{*T}b < 0$$

矛盾

両辺に y^* を掛ける =
等式系の「重み付き和」
を計算する

非負ベクトル $(y^{*T}A)$ と
非負ベクトル x^* の
内積は非負

Farkas, J. (1902). Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 124, 1–27.

強双対→Farkas の補題 証明(今日はやらない)

P: $\max. x_0$ s.t. $Ax - bx_0 = 0, 1 \geq x_0 \geq 0, x \geq 0$.

D: $\min y_0$ s.t. $y^T A \geq 0^T, -y^T b + y_0 \geq 1, y_0 \geq 0$.

問題Pは、許容解 $((x, x_0) = (0, 0))$ が存在。最大値は1以下より、有界。線形計画の基本定理より最適解を持つ。

明らかに、「 $[Ax = b, x \geq 0]$ が解を持つ」 $\Leftrightarrow$ Pの最適値は1」。

更に以下が成り立つ。

$[Ax = b, x \geq 0]$ が解を持たない $\Leftrightarrow$ Pの最適値は0

$\Leftrightarrow$ Dは最適解 (y^*, y_0^*) を持ち、最適値は0 ($= y_0^*$)。

$\Leftrightarrow \exists y^*, y^{*T} A \geq 0^T, -y^{*T} b \geq 1$

$\Leftrightarrow \exists y^*, y^{*T} A \geq 0^T, y^{*T} b < 0$ ゆえに、下記が得られる。

Farkasの補題(等式版):[1902]

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する。

P: $Ax = b, x \geq 0$ D: $y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ。

Farkas の補題

Farkas Gyula

ハンガリーの数学者

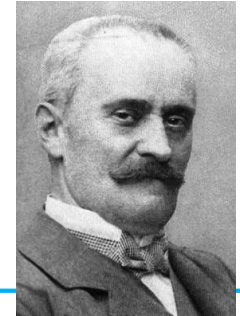
・物理学者 1847-1930

Farkasの補題(等式版):

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.



Farkasの補題(変種):

任意の行列 $(A|b)$ に対し、

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

$$P: Ax \leq b \quad D: y^T A = 0^T, y \geq 0, y^T b < 0$$

$$P: Ax \leq b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y \geq 0, y^T b < 0$$

演習にしましょう！

Farkas, J. (1902). Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 124, 1–27.

Farkas の補題を使ってみよう！

ペグソリティア

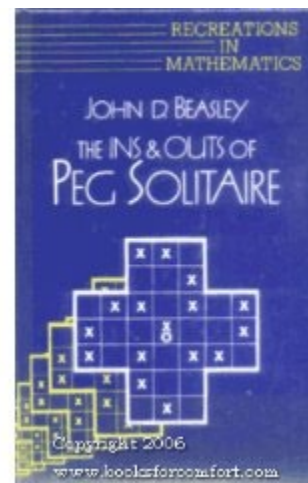
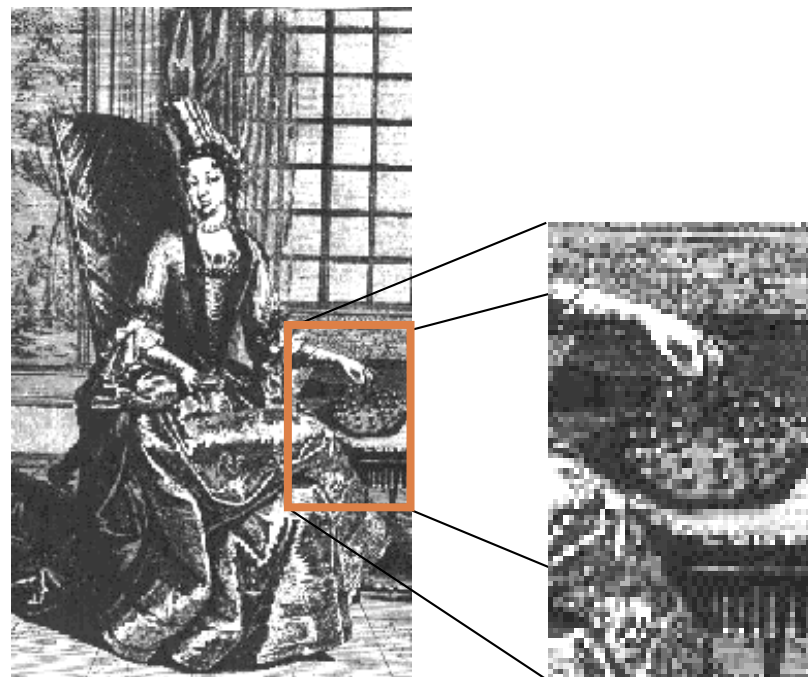
分裂物語

Bondareva–Shapley theorem

ペグソリティア

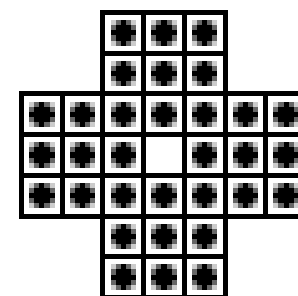
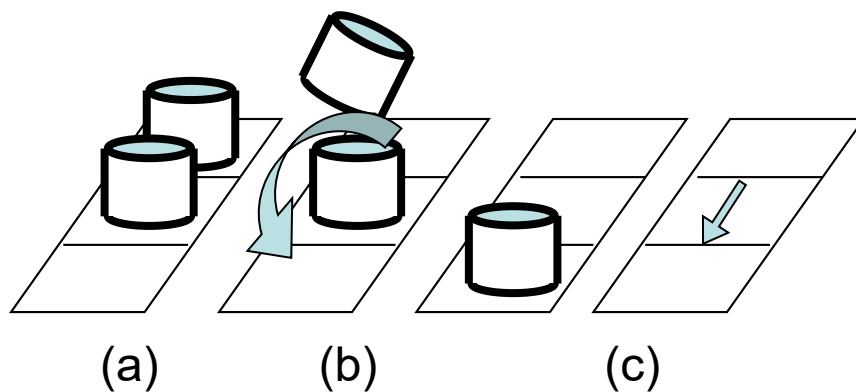
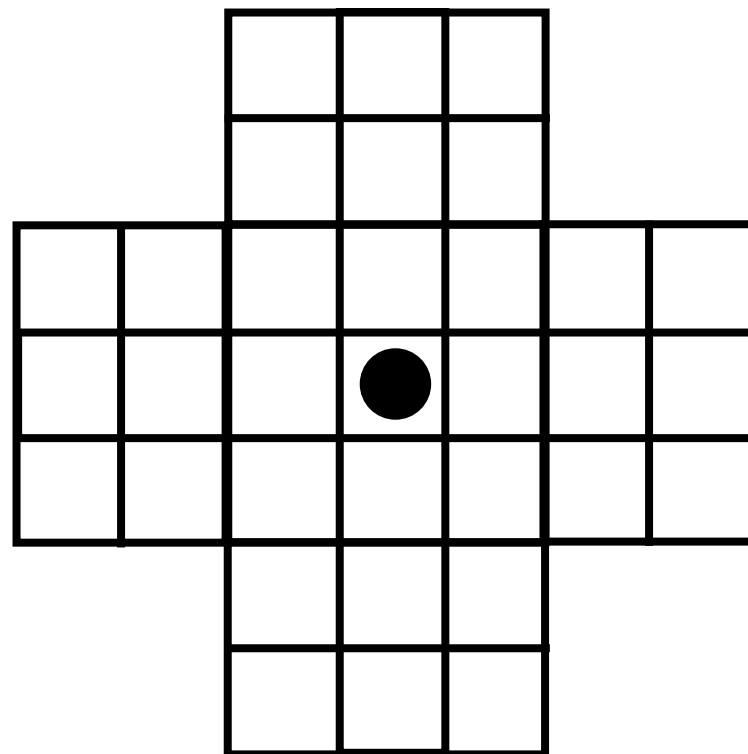
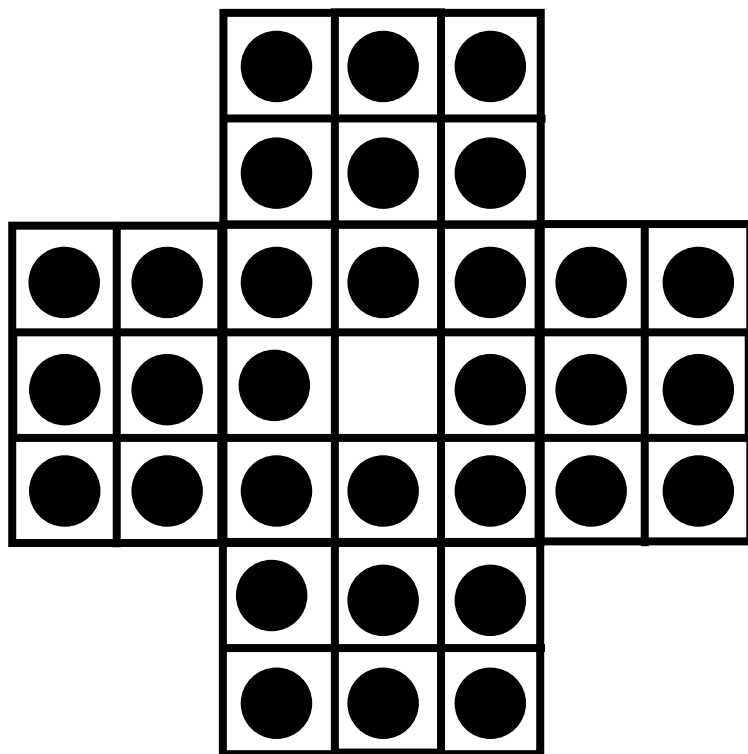


『ペグ・ソリティアをするスービーズ公妃』(1697)
by Claude-Auguste Berrey



John D. Beasley (1985),
The Ins and Outs
of Peg Solitaire,
Oxford University Press.

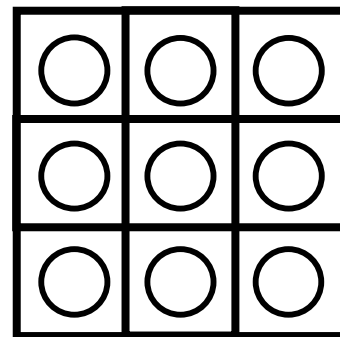
ペグソリティア



言葉の定義

ボード: ボード上には穴がある

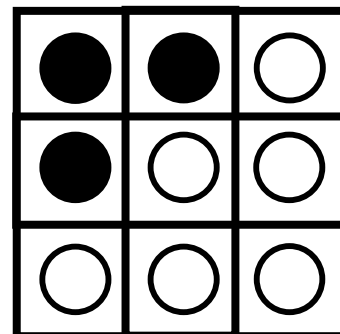
○: 穴



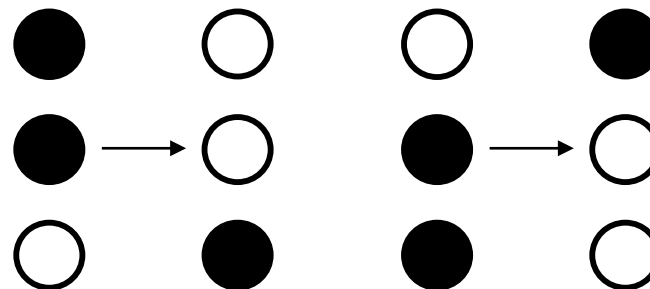
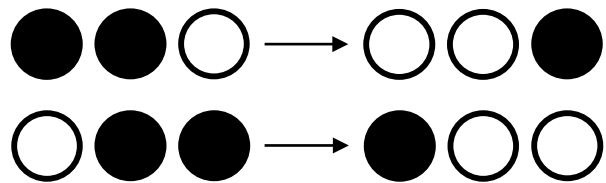
配置:

各穴には最大1つのペグ

●: ペグの有る穴



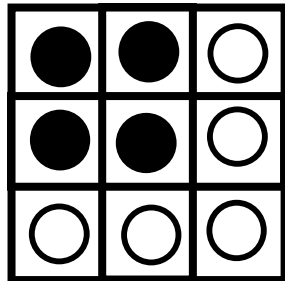
ジャンプ:



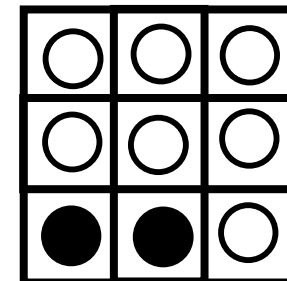
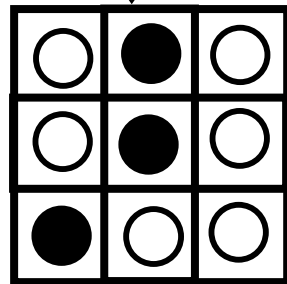
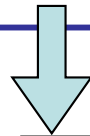
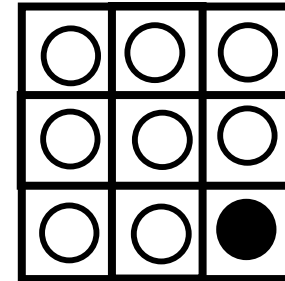
peg solitaire

与えられた問題:

開始配置



終了配置



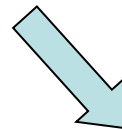
ジャンプ列を(あれば)見つける.
存在しない際は“無い”と答える.

ペグソリティアに関する研究

John D. Beasley (1985): The Ins and Outs of Peg Solitaire

George I. Bell: Peg Solitaire Page

<http://recmath.org/pegsolitaire/>



問題の複雑さ

Uehara, Iwata (1990): ペグソリティア問題はNP-完全
解の存在性の必要条件

de Bruijn (1972):

有限体を用いた必要条件

Berlekamp, Conway, Guy (1982):(Winning Ways)

パゴダ関数を用いた必要条件 (線形不等式系)

Avis, Deza (1996):

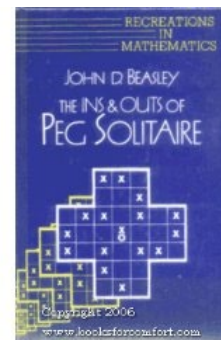
solitaire cone (多面体的アプローチ)

Kiyomi, Matsui (2001):

整数計画法を用いたもの

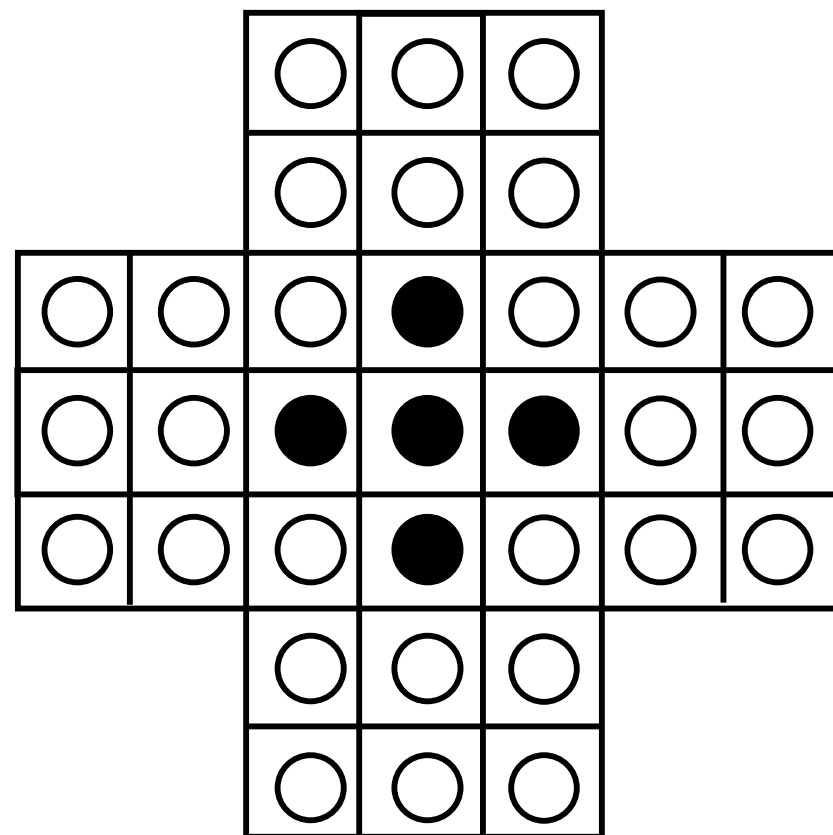
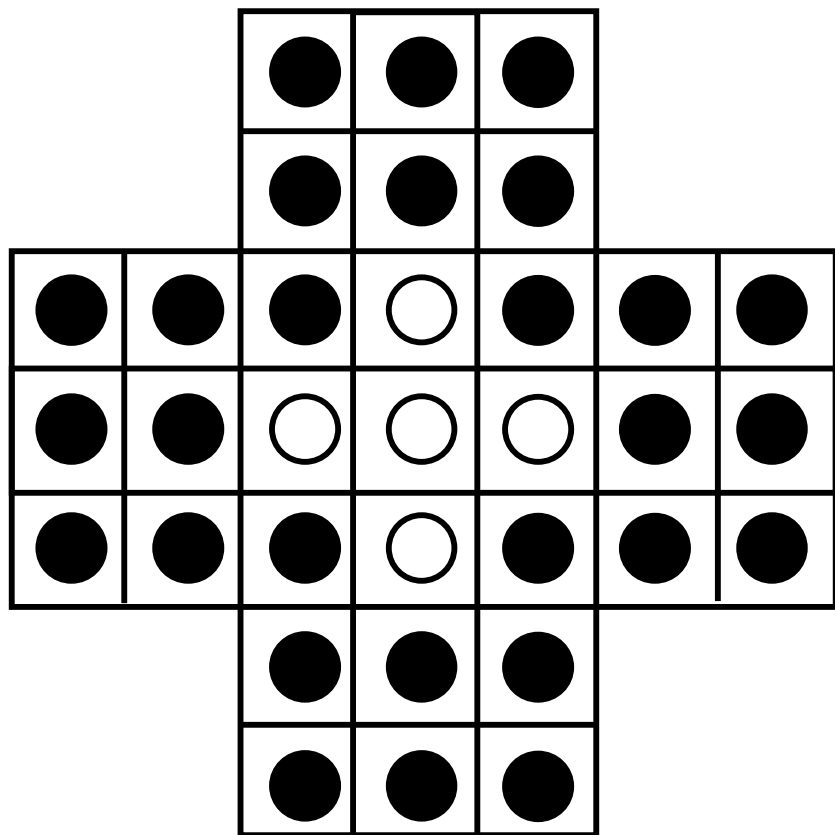
ペグソリティアフォント

<https://www.jaist.ac.jp/~uehara/fonts/peg-solitaire/>



楽しいですよ！

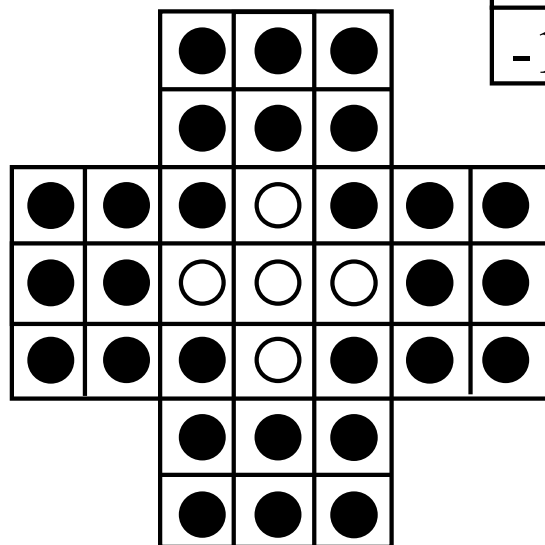
peg solitaire problem example



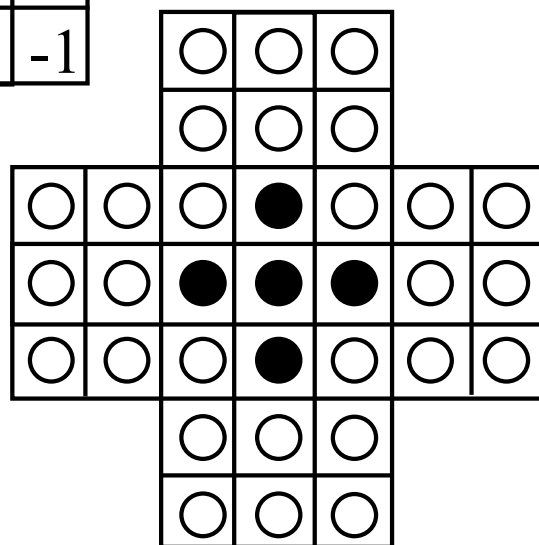
パゴダ関数(ポテンシャル関数)の例

パゴダ関数値＝ペグが存在するマス目の数字の総和

		-1	0	1		
		1	1	1		
-1	1	0	1	0	1	-1
0	1	1	2	1	1	0
-1	1	0	1	0	1	-1
		1	1	1		
		-1	0	-1		



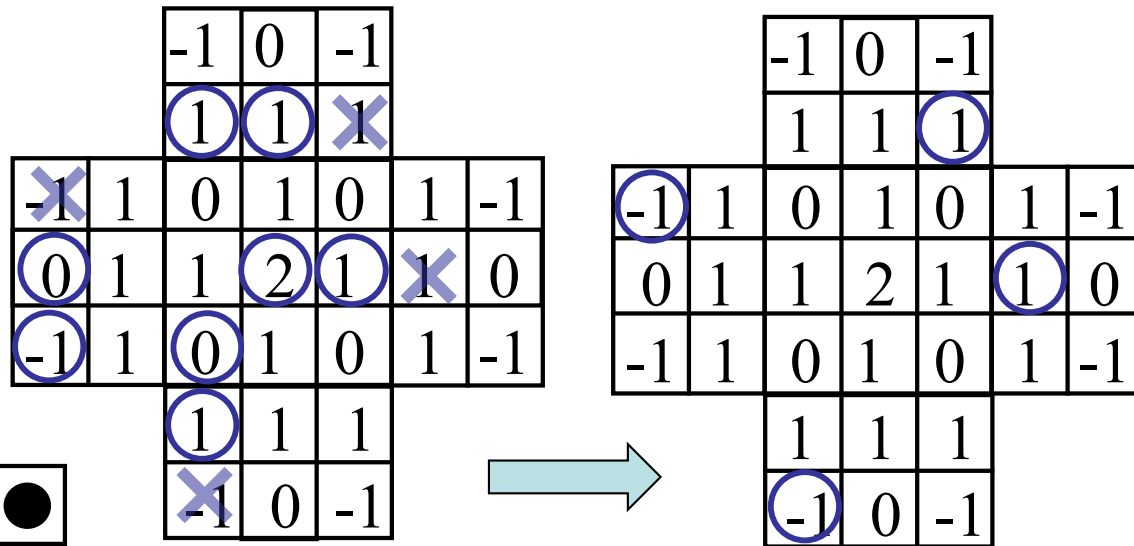
パゴダ関数値＝4



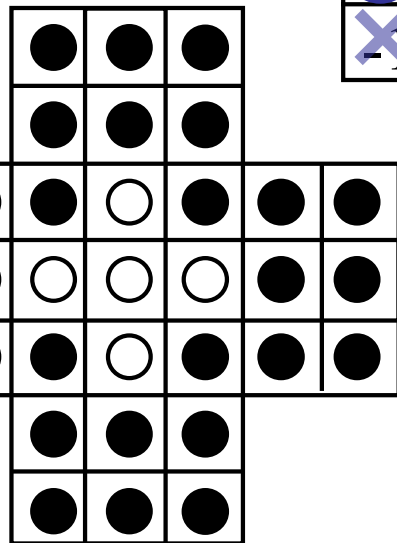
パゴダ関数値＝6



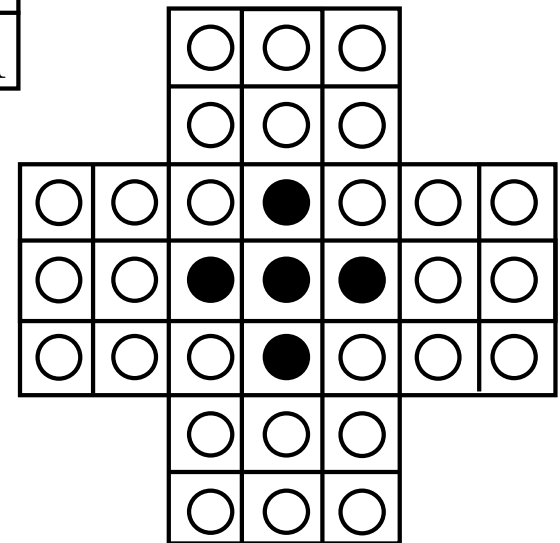
パゴダ関数(ポテンシャル関数)の例



ジャンプ操作で
パゴダ関数値は
単調非増加



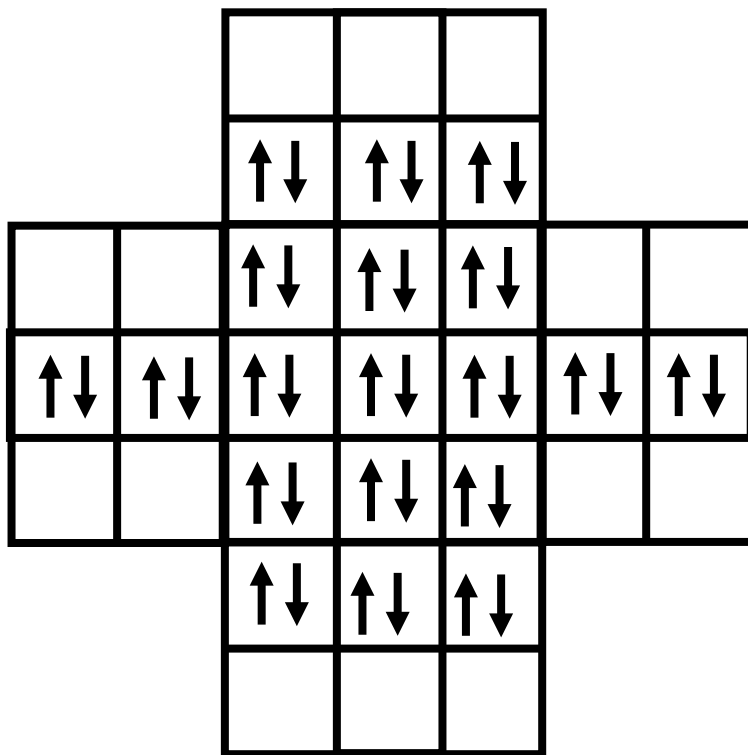
パゴダ関数値=4



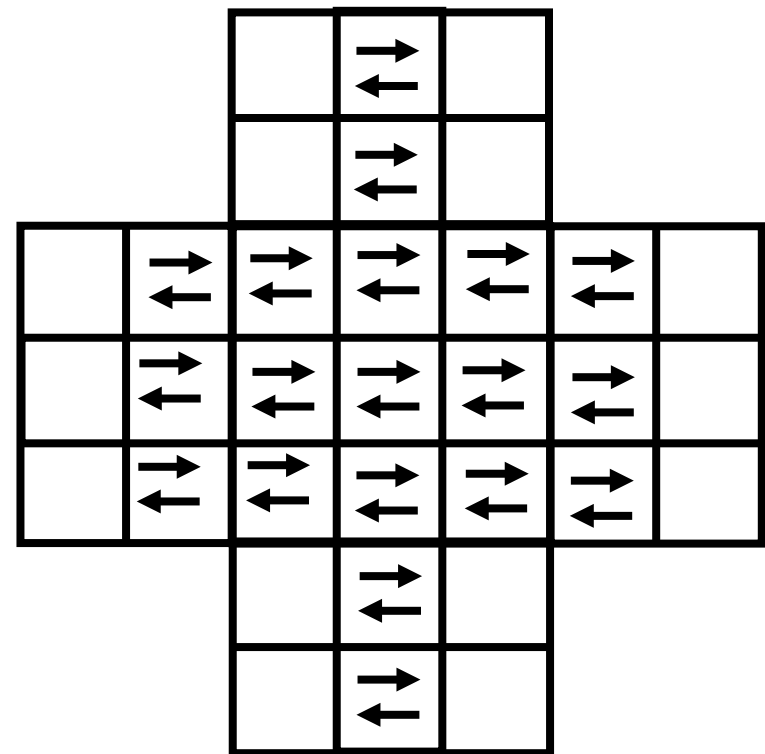
パゴダ関数値=6

ジャンプ位置

ジャンプが起こる場所



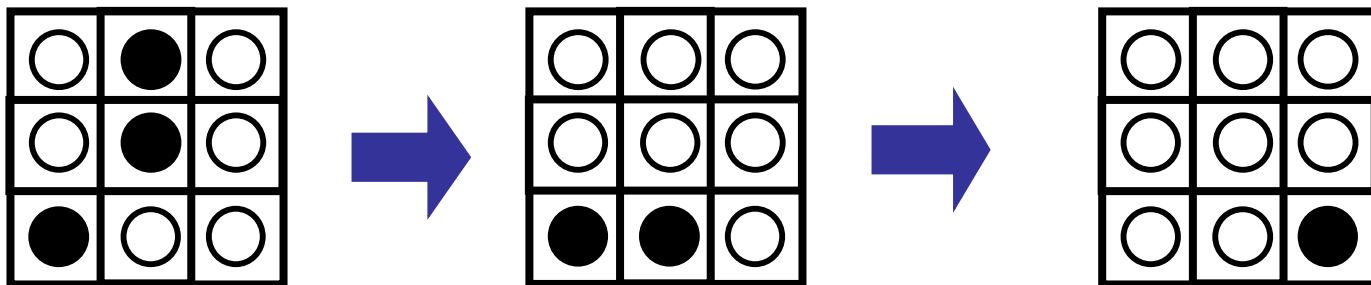
38 種類の縦の
ジャンプ位置



+ 38 種類の横の
ジャンプ位置

= 計 76 種類のジャンプ位置

ジャンプベクトル



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{ジャンプベクトル} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ジャンプ = ジャンプベクトルを引く
 (ジャンプベクトルは2個の 1 と1個の -1)

ジャンプ行列

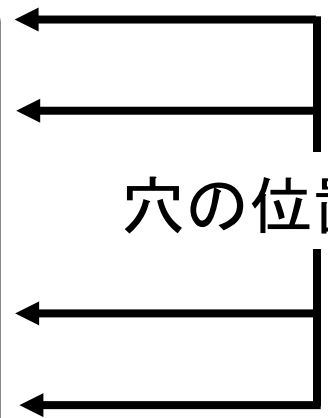
ジャンプ行列: (穴の位置) × (ジャンプ位置)

ジャンプベクトルを列ベクトルとして全て並べたもの

ジャンプベクトル(76本)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

穴の位置(33個)



パゴダ関数: 33個の穴に数を割り当てたもの.

連続する3つの穴 (a,b,c) に対し $a+b \geq c$ が成立.

パゴダ関数を33次元ベクトル y で表すと

$y^T A \geq 0^T$ が成り立つ33次元ベクトル.

ジャンプ行列

A : ジャンプ行列 (ボードで定義される)

p_s : 開始配置の配置ベクトル.

p_f : 終了配置の配置ベクトル.

与えられたペグソリティア問題が解を持つなら,

$\exists x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$:

(1) ジャンプベクトルでインデックスされた
整数ベクトル

(x_j : ジャンプベクトル j でのジャンプ回数)

(2) $p_s - Ax = p_f$

パゴダ関数の導入

Farkas の補題

(P) と (D) のどちらかちょうど一方が成り立つ

$$(P) \exists x, Ax = (p_s - p_f), x \geq 0.$$

$$(D) \exists y, y^T A \geq 0^T, y^T (p_s - p_f) < 0.$$

Berlekamp, Conway, Guy (1982): (Winning Ways)

$$\text{パゴダ関数存在} \Leftrightarrow \exists y, y^T A \geq 0^T, y^T (p_s - p_f) < 0. \\ (y^T p_s < y^T p_f)$$

開始配置 < 終了配置

パゴダ関数: 33個の穴に数を割り当てたもの.

連続する3つの穴 (a,b,c) に対し $a+b \geq c$ が成立.

パゴダ関数を33次元ベクトル y で表すと

$y^T A \geq 0^T$ が成り立つ33次元ベクトル.

パゴダ関数の存在性

A : ジャンプ行列 (ボードで定義される)

p_s : 開始配置の配置ベクトル.

p_f : 終了配置の配置ベクトル.

開始配置 < 終了配置

次の線形不等式系

$$y^T = (y_1, y_2, \dots, y_{33}), \quad y^T A \geq 0^T, \quad y^T p_s < y^T p_f,$$

が解 y を持つなら,

与えられたペグソリティア問題は解を持たない.

33変数77本の線形不等式系の解を求める

→線形計画問題

注: 上記の「逆」は、成り立たない。

パゴダ関数が無力な例

(P) と (D) のどちらかちょうど一方が成り立つ

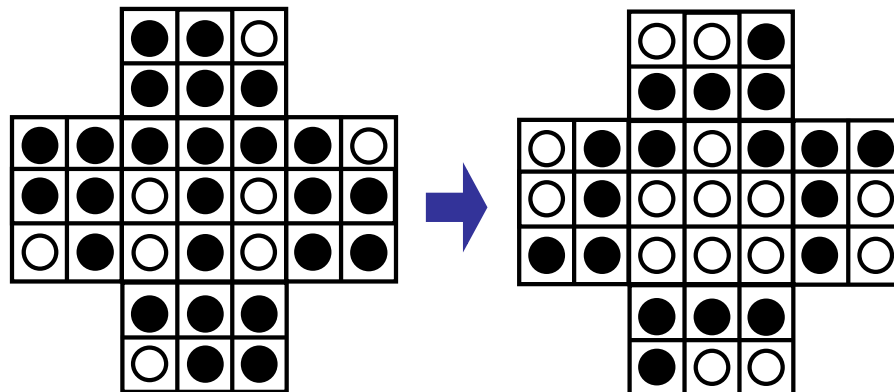
$$(P) \exists x, Ax = (p_s - p_f), x \geq 0.$$

(x_j : ジャンプベクトル j でのジャンプ回数)

$$(D) \exists y, y^T A \geq 0^T, y^T (p_s - p_f) < 0.$$

逆は成り立たない

(ジャンプの順番等の情報
がないから、当たりまえ！)



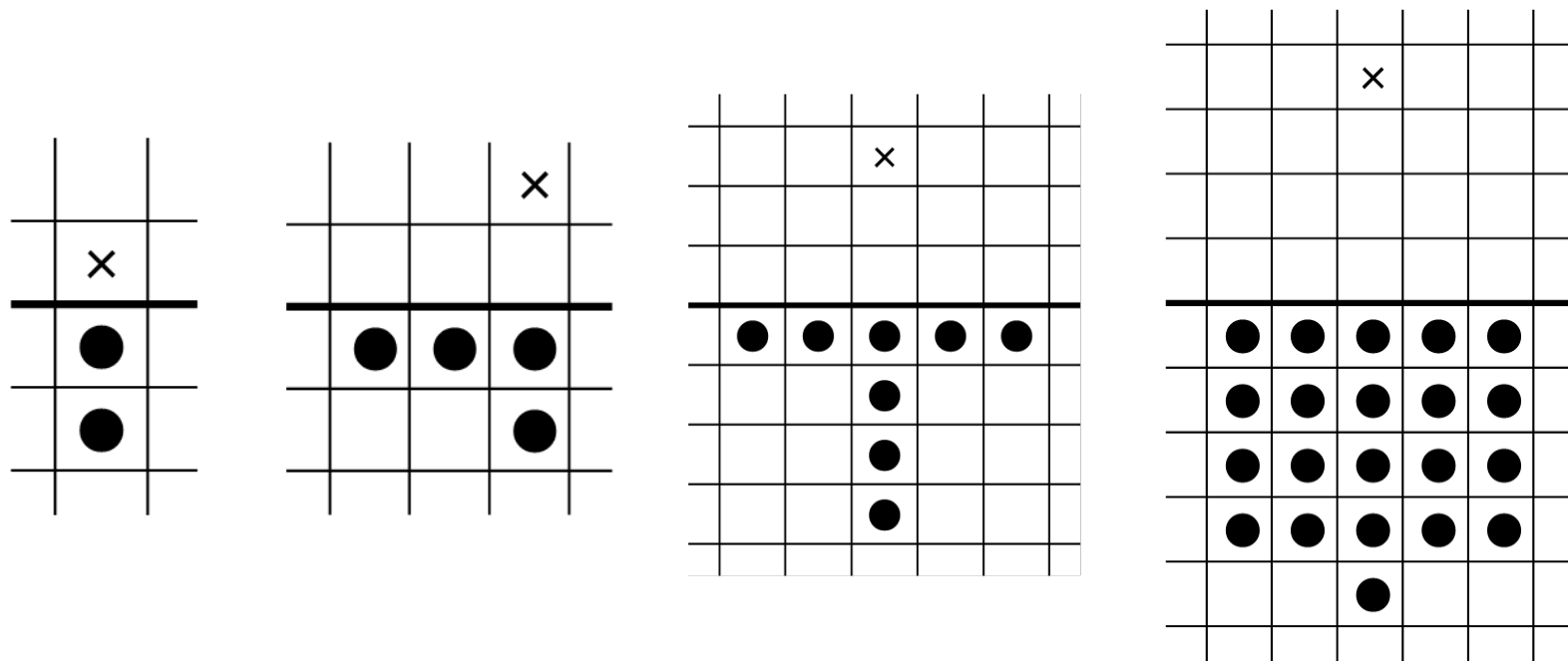
ペグソリティアは解無し!

しかし, この問題例では, 上記線形不等式系は解を持たない
線形不等式系は許容解あり $\Rightarrow$ ペグソリティアは解無し

線形不等式系は許容解あり  ペグソリティアは解無し

ペグソリティア アーミー (Conway's Soldiers)

無限に広がった盤で、ある1線から手前のみにペグが有るとき、線の向こうのどこまで、ペグを送り込めるか？



5歩目には到達できないことをパゴダ関数の考えを使って示す
Conway, Berlekamp, Guy (1961)

パゴダ関数の双対についての議論は、あまりされていない。

ここまでの話の発見は、Pagoda関数から出発して双対を取った。

パズルを解く

パズル(問題)を解く

答があるパズルを解いているだけ
だと気付かない本質的な問題

実際の手順を見つける問題より、
問題に解があるかを判定する問題の方が
(数学? 情報科学? の視点からは)本質的

解が『存在することを示す』より『存在しないことを示す』の方が
一般に難しい

存在を示す: 実際に作ってみせる

存在しない: 全部試してみる????

何かが『存在することの証明』より『存在しない証明』の方が、
一般的に難しい

幽霊が存在する: 実際に幽霊を連れてくる

幽霊は存在しない: すべてを探索する????

Farkas の補題

Farkasの補題(等式版):

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

解が『存在することを示す』より『存在しないことを示す』の方が
一般に難しい

存在を示す: 実際に作ってみせる

存在しない: 全部試してみる????

これに対し

Farkasの補題があるお陰で、「Pの解が無い」ということを、「Dの解がある」という証拠で保証できる。

Farkas, J. (1902). Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 124, 1–27.

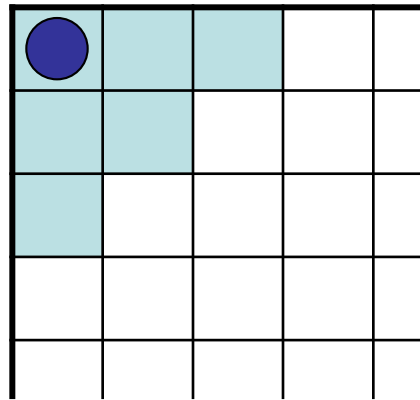
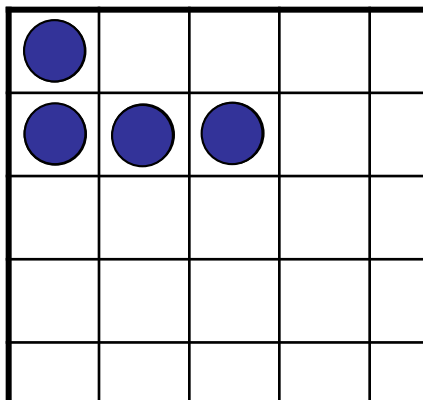
パゴダ関数を使ってみたい！

分裂物語

松井知己. (2008). OR メモランダム 解けないパズルを LP で解く--ペグソリティアとパゴダ関数と線形計画. オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, 53(11), 643-648.

分裂物語

分裂物語(芦ヶ原伸之(よしがはら のぶゆき))



キャストパズル
(芦ヶ原伸之 監修)

左上隅の1つから始める

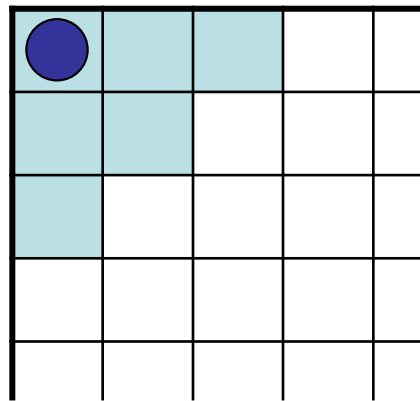
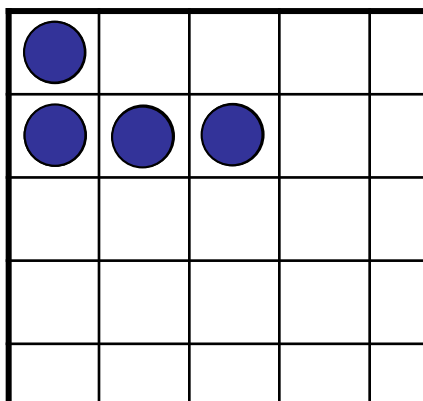
ペグは分裂して右と下に移動する(1マスにペグは1個まで)

盤は, 右下方向に無限に広がっている

左上隅の6マスから全て追い出すことができるか?

分裂物語

分裂物語(芦ヶ原伸之(よしがはら のぶゆき))



左上隅の1つから始める

ペグは分裂して右と下に移動する(1マスにペグは1個まで)

盤は, 右下方向に無限に広がっている

左上隅の6マスから全て追い出すことができるか?

答:「不可能だった」 → 不可能であることをどうやって示すか?

可能であることの証明: 実際の手順を示せば良い(ある意味簡単)

不可能であることの証明: すべての手順を試すわけには行かない

パゴダ関数を使おう!

6×6の盤では？（盤の端では動けない）

パゴダ関数を使おう！

「Farkasの補題で双対を作る」というストーリー（手法）を作った。
このパズルでも同じ手法（ストーリー）で対処できるかも。

6×6盤のマス目に11から66まで番号付けする

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

		●			
●		●			
	●				

0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

パゴダ関数という
道具だけでなく、
道具の使い方の
ストーリーが重要

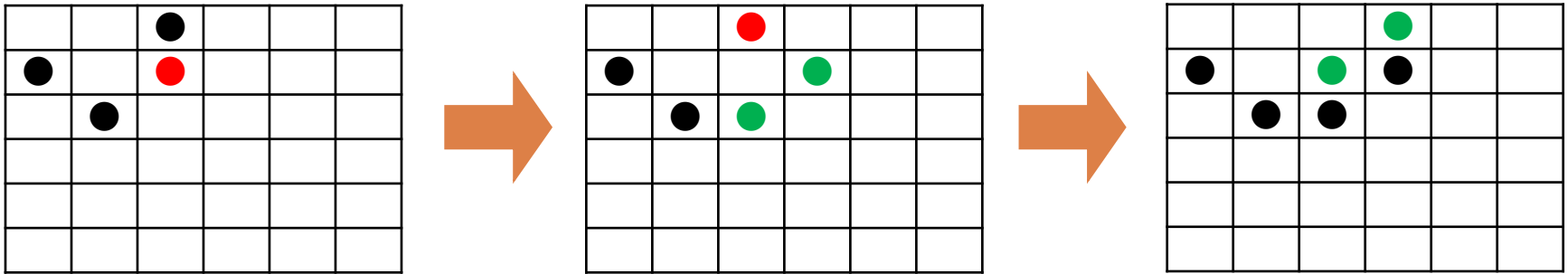
配置ベクトル：36次元 0-1ベクトル

ペグがあるとき1, 無いとき0, としたもの

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \{0,1\}^{36}$$

6×6の盤では？

move ベクトル (●: 取り除く場所(候補は25カ所))



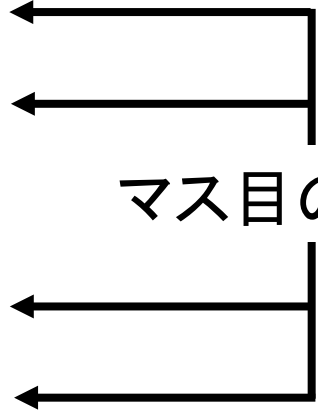
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

move = move ベクトルを引く (move ベクトルは1個の1と2個の-1)

move 行列

move 行列: (マス目) × (取り除く場所)

move ベクトルを列ベクトルとして全て並べた行列
取り除くペグの場所(25カ所)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$


マス目の位置(36個)

x_{ij} : 場所 (i, j) での move の回数を表す変数

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{55})$$

$B\mathbf{x}$: move による配置の変化

解の非存在性

B : move 行列

p_s : 開始配置の配置ベクトル. (1,1)要素のみが1.

p_f : 終了配置の(上界)配置ベクトル. 左上6マスのみが0.

x_{ij} : 場所 (i, j) での move の回数を表す変数

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{55})$$

6×6の分裂物語が解を持つならば

$$p_s - Bx \leq p_f, x \geq 0 \text{ が解を持つ.}$$

移動の順番を無視している
ので逆は成り立たない

Farkas の補題

次のPとDのうちどちらか丁度1つのみが解を持つ.

$$(P) \quad Bx \geq (p_s - p_f), x \geq 0$$

$$(D) \quad y^T B \leq 0^T, y \geq 0, y^T (p_s - p_f) > 0$$

(D)が解を持つ $\rightarrow$ (P)が解を持たない

$\rightarrow$ 6×6の分裂物語が解を持たない

6×6盤の不等式系

$$(D) \quad \mathbf{y}^\top \mathbf{p}_s > \mathbf{y}^\top \mathbf{p}_f, \\ \mathbf{y}^\top \mathbf{B} \leq \mathbf{0}^\top, \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}
y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	y_{26}
y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	y_{35}	y_{36}
y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}	y_{45}	y_{46}
y_{51}	y_{52}	y_{53}	y_{54}	y_{55}	y_{56}
y_{61}	y_{62}	y_{63}	y_{64}	y_{64}	y_{66}

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{p}_s = y_{11},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\top \mathbf{p}_f = & y_{14} + y_{15} + y_{16} \\ & + y_{23} + y_{24} + y_{25} + y_{26} \\ & + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35} + y_{36} \\ & + y_{41} + y_{42} + y_{43} + y_{44} + y_{45} + y_{46} \\ & + y_{51} + y_{52} + y_{53} + y_{54} + y_{55} + y_{56} \\ & + y_{61} + y_{62} + y_{63} + y_{64} + y_{65} + y_{66} \end{aligned}$$

$$y_{11} \leq y_{21} + y_{12}$$

$$y_{12} \leq y_{22} + y_{13}$$

$$y_{13} \leq y_{23} + y_{14}$$

$$y_{14} \leq y_{24} + y_{15}$$

$$y_{15} \leq y_{25} + y_{16}$$

$$y_{21} \leq y_{31} + y_{22}$$

$$y_{22} \leq y_{32} + y_{23}$$

$$y_{23} \leq y_{33} + y_{24}$$

$$y_{24} \leq y_{34} + y_{25}$$

$$y_{25} \leq y_{35} + y_{26}$$

$$y_{31} \leq y_{41} + y_{32}$$

$$y_{32} \leq y_{42} + y_{33}$$

$$y_{33} \leq y_{43} + y_{34}$$

$$y_{34} \leq y_{44} + y_{35}$$

$$y_{35} \leq y_{45} + y_{36}$$

$$y_{41} \leq y_{51} + y_{42}$$

$$y_{42} \leq y_{52} + y_{43}$$

$$y_{43} \leq y_{53} + y_{44}$$

$$y_{44} \leq y_{54} + y_{45}$$

$$y_{45} \leq y_{55} + y_{46}$$

$$y_{51} \leq y_{61} + y_{52}$$

$$y_{52} \leq y_{62} + y_{53}$$

$$y_{53} \leq y_{63} + y_{54}$$

$$y_{54} \leq y_{64} + y_{55}$$

$$y_{55} \leq y_{65} + y_{56}$$

6 × 6盤の不等式系

(D) は以下の解を持つ

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{p}_s = 1 > \frac{22}{27} = \mathbf{y}^\top \mathbf{p}_f$$

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{B} \leq \mathbf{0}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}
y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	y_{26}
y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	y_{35}	y_{36}
y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}	y_{45}	y_{46}
y_{51}	y_{52}	y_{53}	y_{54}	y_{55}	y_{56}
y_{61}	y_{62}	y_{63}	y_{64}	y_{64}	y_{66}

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

$$y_{11} \leq y_{21} + y_{12}$$

$$y_{12} \leq y_{22} + y_{13}$$

$$y_{13} \leq y_{23} + y_{14}$$

$$y_{14} \leq y_{24} + y_{15}$$

6×6の盤での move

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	$1/2$	$1/6$	0	0	0
$1/2$	$(1/3)$	$(1/2)(1/3)$	$(1/6)(1/3)$	0	0
$1/6$	$(1/2)(1/3)$	$(1/3)^2$	$(1/2)(1/3)^2$	$(1/6)(1/3)^2$	0
0	$(1/6)(1/3)$	$(1/2)(1/3)^2$	$(1/3)^3$	$(1/2)(1/3)^3$	$(1/6)(1/3)^2$
0	0	$(1/6)(1/3)^2$	$(1/2)(1/3)^3$	0	0
0	0	0	$(1/6)(1/3)^2$	0	0

初期値: 1

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

初期値: $1 \Rightarrow 1$

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	$(1/2)(1/3)$	$(1/6)(1/3)$	0	0
1/6	$(1/2)(1/3)$	$(1/3)^2$	$(1/2)(1/3)^2$	$(1/6)(1/3)^2$	0
0	$(1/6)(1/3)$	$(1/2)(1/3)^2$	$(1/3)^3$	$(1/2)(1/3)^3$	$(1/6)(1/3)^2$
0	0	$(1/6)(1/3)^2$	$(1/2)(1/3)^3$	0	0
0	0	0	$(1/6)(1/3)^2$	0	0

初期値: $1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1$

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

初期値: $1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1$

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

初期値: $1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 + (1/18)$

$$y_{14} \leq y_{24} + y_{15}$$

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

初期値: $1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 + (1/18) \Rightarrow 1 + (1/18)$

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

初期値: $1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1 + (1/18) \Rightarrow 1 + (1/18)$

ポテンシャルは, 単調非減少

6×6の盤では？

各マス目に, Dの解に対応する値を割り当てる

以下を定義

配置のポテンシャル: ペグが置かれたマス目の数値の合計

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

初期値: 1

ポテンシャルは単調非減少

右下の30個のマス目の重み和: $22/27 \Rightarrow$ ゆえに不可能

無限の盤では？

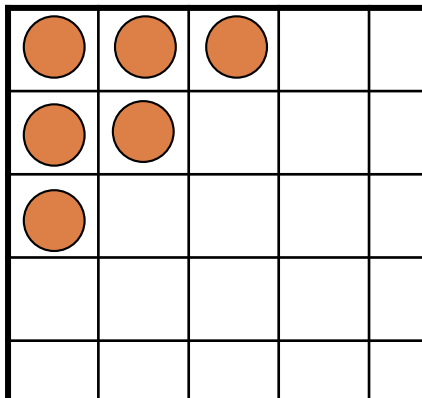
6×6盤のマス目の問題を，無限の広さの盤へ拡張しよう！

1	1/2	1/6	0	0	0
1/2	(1/3)	(1/2)(1/3)	(1/6)(1/3)	0	0
1/6	(1/2)(1/3)	(1/3) ²	(1/2)(1/3) ²	(1/6)(1/3) ²	0
0	(1/6)(1/3)	(1/2)(1/3) ²	(1/3) ³	(1/2)(1/3) ³	(1/6)(1/3) ²
0	0	(1/6)(1/3) ²	(1/2)(1/3) ³	0	0
0	0	0	(1/6)(1/3) ²	0	0

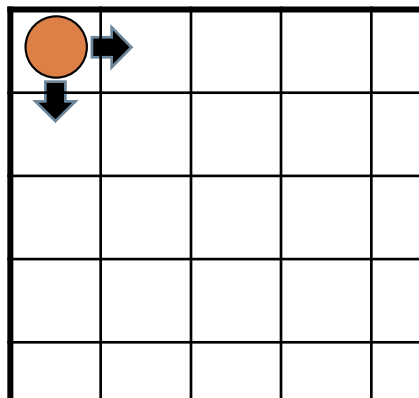
公比(1/3)の等比数列？

新しい問題

初期配置



左上隅のpegを取り除けるか？



$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ddots & \ddots & & & 0 \\
 \frac{1}{6} & \ddots & \left(\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^k & & \\
 & \ddots & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^k & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \\
 0 & & & & & &
 \end{array}$$

初期配置のポテンシャル

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{8}{3} = 2.666
 \end{aligned}$$

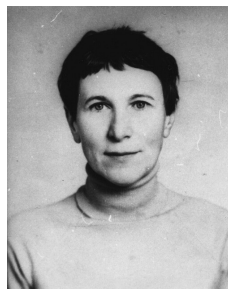
>

5本の等比数列の総和(左上隅を除く)

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

答: できない

松井知己. (2008). OR メモランダム 解けないパズルを LP で解く, オペレーションズ・リサーチ 53(11), 643-648.



Bondareva–Shapley theorem

特性関数ゲームの「コアが非空」の必要十分条件
Bondareva と Shapley によって独立して発表された。

[1] Bondareva, Olga N. "Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games." *Problemy Kibernet* 10 (1963): 119.

[2] Shapley, Lloyd S. "On balanced sets and cores." *Naval research logistics quarterly* 14.4 (1967): 453-460.

特性関数ゲーム(協力ゲーム)

$N = \{1, 2, \dots, n\}$: プレイヤーの集合 ($S \subseteq N$: 提携)

$v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$: 特性関数,

$v(S)$: 提携 S 中のプレイヤーが協力した場合の報酬

(N, v) : 特性関数ゲーム

$(z_1, z_2, \dots, z_n)$: 利得ベクトル

コア: 下記を満たす利得ベクトルの集合

(1) 全体合理性: $z_1 + z_2 + \dots + z_n = v(N)$

(2) 提携合理性: $\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} z_i \geq v(S)$

例：破産ゲーム (Bankruptcy Game)

何人か(プレイヤー)が集まって、日曜市のイベントを開催

会場費： w_0

プレイヤー $i \in N$ の売上は $w_i \geq 0$ であった

利益：総売上 $\sum_{i \in N} w_i$ から会場費 w_0 を引いた値

$-w_0 + \sum_{i \in N} w_i$ (> 0 を仮定)をどう分配したら良いか

特性関数： $v(S)$ 提携 S 中のプレイヤーが協力した際の報酬

$$v(S) = \max\{0, -w_0 + \sum_{i \in S} w_i\}$$

総売上 < 会場費
ならば開催しなかったよ！

(N, v) : 破産ゲーム

コア：下記を満たす利得ベクトル $(z_1, z_2, \dots, z_n)$

(1) 全体合理性：全体合理性： $z_1 + z_2 + \dots + z_n = v(N)$

(2) 提携合理性： $\emptyset \neq \forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} z_i \geq v(S)$

例：破産ゲーム (Bankruptcy Game)

$N = \{1, 2, 3, 4\}$, $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (6, 20, 16, 8)$ [千円]

会場費: $w_0 = 26$ [千円]

→ 総売上 **50** [千円] から会場費を引いた $-26 + (6 + 20 + 16 + 8) = 24$ [千円]

をどう分配したら良いか

特性関数: $v(S) = \max\{0, -w_0 + \sum_{i \in S} w_i\}$ $\max\{0, -26 + (16 + 8)\} = \max\{0, -2\} = 0$

$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0$,

$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{1, 4\}) = 0$, $v(\{2, 3\}) = 10$, $v(\{2, 4\}) = 2$, $v(\{3, 4\}) = 0$,

$v(\{1, 2, 3\}) = 16$, $v(\{1, 2, 4\}) = 8$, $v(\{1, 3, 4\}) = 4$, $v(\{2, 3, 4\}) = 18$, $v(N) = 24$

利得ベクトル $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (3, 9, 8, 4)$ $\max\{0, -26 + (20 + 16 + 8)\} = 18$

$w_i - z_i$: プレイヤー $i \in N$ の会場費分担額 (3, 11, 8, 4)

コア: 下記を満たす

(1) 全体合理性: 全体合理性: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 3 + 9 + 8 + 4 = 24 = v(N)$

(2) 提携合理性: $\emptyset \neq \forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} z_i \geq v(S)$

$z_2 + z_3 = 9 + 8 \geq 10 = v(\{2, 3\})$, $z_2 + z_4 = 9 + 4 \geq 2 = v(\{2, 4\})$,

$z_1 + z_2 + z_3 = 3 + 9 + 8 \geq 16 = v(\{1, 2, 3\})$, $z_1 + z_2 + z_4 = 3 + 9 + 4 \geq 8 = v(\{1, 2, 4\})$

$z_1 + z_3 + z_4 = 3 + 8 + 4 \geq 4 = v(\{1, 3, 4\})$, $z_2 + z_3 + z_4 = 9 + 8 + 4 \geq 18 = v(\{2, 3, 4\})$

$9 + 8 + 4 = 21 \geq 18$

Bondareva–Shapley theorem

ボンダレヴァ＝シャプレイの定理

特性関数ゲーム (N, v) のコアが空でない必要十分条件は、そのゲームが Balanced game であることである。

Balanced weight:

$\alpha: 2^N \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ が Balanced weight

$\Leftrightarrow \alpha \geq 0$ かつ $\forall i \in N, \sum_{S: i \in S \subseteq N} \alpha(S) = 1$

各プレイヤーが持つ時間やリソースの「100%(1)」を、各提携 S に $\alpha(S)$ ずつ割り振っているイメージ。

(N, v) が **Balanced game** $\Leftrightarrow$ 任意の Balanced weight α に対し、

$\sum_{S: \emptyset \neq S \subseteq N} \alpha(S) v(S) \leq v(N)$ が成り立つ。

$[\alpha(S)v(S) \text{ の総和}] \leq v(N)$

では、改めて、

Bondareva–Shapley theorem

特性関数ゲームの「コアが非空」の必要十分条件
Bondareva と Shapley によって独立して発表された。

[1] Bondareva, Olga N. "Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games." *Problemy Kibernet* 10 (1963): 119.

[2] Shapley, Lloyd S. "On balanced sets and cores." *Naval research logistics quarterly* 14.4 (1967): 453-460.

Bondareva–Shapley theorem

コア: 下記の線形不等式系を満たすベクトル $(z_1, z_2, \dots, z_n)$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \dots + z_n = v(N) \\ \sum_{i \in S} z_i \geq v(S) \quad (\emptyset \neq \forall S \subseteq N) \end{cases}$$

コアが空でない $\Leftrightarrow$ 下記が解を持つ

$$-z_1 - z_2 - \dots - z_n \geq -v(N)$$

$$\sum_{i \in S} z_i \geq v(S) \quad (\emptyset \neq \forall S \subseteq N) \Leftrightarrow$$

$$-\mathbf{1}^\top \mathbf{z} \geq -v(N)$$

$$A\mathbf{z} \geq \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + \dots + z_n &\leq v(N) \\ \sum_{i \in N} z_i &\geq v(N) \end{aligned}$$

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき

$A =$	1	0	0	0	{1}	$v(\{1\})$
	0	1	0	0	{2}	$v(\{2\})$
	0	0	1	0	{3}	$v(\{3\})$
	0	0	0	1	{4}	$v(\{4\})$
	1	1	0	0	{1,2}	$v(\{1,2\})$
	1	0	1	0	{1,3}	$v(\{1,3\})$
	1	0	0	1	{1,4}	$v(\{1,4\})$
	0	1	1	0	{2,3}	$v(\{2,3\})$
	0	1	0	1	{2,4}	$v(\{2,4\})$
	0	0	1	1	{3,4}	$v(\{3,4\})$
	1	1	1	0	{1,2,3}	$v(\{1,2,3\})$
	1	1	0	1	{1,2,4}	$v(\{1,2,4\})$
	1	0	1	1	{1,3,4}	$v(\{1,3,4\})$
	0	1	1	1	{2,3,4}	$v(\{2,3,4\})$
	1	1	1	1	{1,2,3,4}	$v(\{1,2,3,4\})$

$\mathbf{b} =$

Bondareva–Shapley theorem

Farkas の補題

D' が解を持つならば
 $\alpha_N > 0$ が成り立つ
 $\rightarrow \alpha_N = 1$ の解を持つ

下記のPとD、どちらか丁度1つのみが解を持つ

$$\begin{aligned} P: & -\mathbf{1}^\top z \geq -v(N) \\ & Az \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D': & -\alpha_N \mathbf{1}^\top + \alpha^\top A = \mathbf{0}^\top \\ & -\alpha_N v(N) + \alpha^\top \mathbf{b} > 0 \\ & \alpha_N \geq 0, \alpha \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: & -\mathbf{1}^\top + \alpha^\top A = \mathbf{0}^\top \\ & -v(N) + \alpha^\top \mathbf{b} > 0 \\ & \alpha \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

コアが空でない ($\Leftrightarrow P$ が解を持つ)

$\Leftrightarrow D$ が解を持たない

$\Leftrightarrow \neg [\exists \alpha, (-\mathbf{1}^\top + \alpha^\top A = \mathbf{0}^\top) \wedge (-v(N) + \alpha^\top \mathbf{b} > 0) \wedge (\alpha \geq \mathbf{0})]$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \geq \mathbf{0}, (\alpha^\top A = \mathbf{1}^\top) \rightarrow (\alpha^\top \mathbf{b} \leq v(N))$

Bondareva–Shapley theorem

Farkas の補題

コアが空でない

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \geq \mathbf{0}, (\alpha^\top A = \mathbf{1}^\top) \rightarrow (\alpha^\top \mathbf{b} \leq v(N))$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \geq \mathbf{0}, (\forall i \in N, \sum_{S: i \in S \subseteq N} \alpha(S) = 1) \\ \rightarrow \sum_{S: \emptyset \neq S \subseteq N} \alpha(S) v(S) \leq v(N)$$

	1	2	3	4	
1	0	0	0		{1}
0	1	0	0		{2}
0	0	1	0		{3}
0	0	0	1		{4}
1	1	0	0		{1,2}
1	0	1	0		{1,3}
1	0	0	1		{1,4}
0	1	1	0		{2,3}
0	1	0	1		{2,4}
0	0	1	1		{3,4}
1	1	1	0		{1,2,3}
1	1	0	1		{1,2,4}
1	0	1	1		{1,3,4}
0	1	1	1		{2,3,4}
1	1	1	1		{1,2,3,4}

$\alpha^\top = (1, 1, 1, 1)$

$$\alpha^\top \mathbf{b} = \alpha^\top$$

$v(\{1\})$
$v(\{2\})$
$v(\{3\})$
$v(\{4\})$
$v(\{1,2\})$
$v(\{1,3\})$
$v(\{1,4\})$
$v(\{2,3\})$
$v(\{2,4\})$
$v(\{3,4\})$
$v(\{1,2,3\})$
$v(\{1,2,4\})$
$v(\{1,3,4\})$
$v(\{2,3,4\})$
$v(\{1,2,3,4\})$

$$= \sum_{S: \emptyset \neq S \subseteq N} \alpha(S) v(S) \leq v(N)$$

Bondareva–Shapley theorem

Farkas の補題

コアが空でない

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \geq \mathbf{0}, (\alpha^\top A = \mathbf{1}^\top) \rightarrow (\alpha^\top \mathbf{b} \leq v(N))$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \geq \mathbf{0}, (\forall i \in N, \sum_{S: i \in S \subseteq N} \alpha(S) = 1) \\ \rightarrow \sum_{S: \emptyset \neq S \subseteq N} \alpha(S) v(S) \leq v(N)$$

私はこっちが好き！！

コアが空 $\Leftrightarrow$ 下記Dが解 $\alpha \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ を持つ

$$D: \alpha \geq \mathbf{0}, \\ \alpha^\top A = \mathbf{1}^\top \text{ and } \\ \alpha^\top \mathbf{b} = [\alpha(S)v(S) \text{ の総和}] > v(N))$$

例えば

$$\begin{aligned} \max. & \sum_S v(S) \alpha(S) \\ \text{s.t. } & \alpha^\top A = \mathbf{1}^\top, \\ & \alpha \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

を解けばコアが空か判定できる

Bondareva–Shapley theorem

コアが空 $\Leftrightarrow$ 下記Dが解 $\alpha \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ を持つ

$$\begin{aligned} D: \alpha &\geq \mathbf{0}, \\ \alpha^\top A &= \mathbf{1}^\top \text{ and} \\ \alpha^\top \mathbf{b} &= [\alpha(S)v(S) \text{の総和}] > v(N) \end{aligned}$$

例えば $\max. \sum_S v(S) \alpha(S)$
 $\text{s.t. } \alpha^\top A = \mathbf{1}^\top,$
 $\alpha \geq \mathbf{0}.$ を解けばコアが空か判定できる

非負変数が $2^n - 1$ 個
 等式制約は n 本

計算量理論の専門知識をお持ちの方へ
 コアが空 $\Leftrightarrow$ 「上記のLPの最適値 $> v(N)$ 」

α^* : 最適基底解 とする

α^* で正の値を持つ変数は基底変数 $\rightarrow \alpha^*$ で正の値を持つ変数は高々 n 個

α^* で正の値を持つ変数とその値だけを保持 $\rightarrow$ コアが空であることの証拠

等式系 $\alpha^\top A = \mathbf{1}^\top$ は、線形等式 n 本なので、確認は $O(n^2)$.

$[\alpha(S)v(S) \text{の総和}]$ の計算と、 $v(N)$ との比較は $O(n)$.

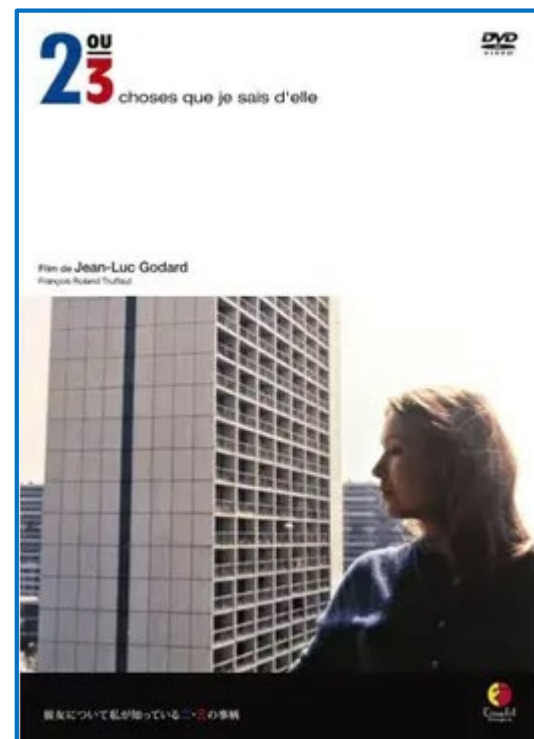
コアが空であることの、多項式サイズ証明書 (certificate) が存在する。

「コアが非空」であることの証明は、確認する不等式が 2^n 本あり(そのままでは)困難。

「コアが非空＝解が存在」の方が確認が難しい、というところが面白い！

1時間目は終わります

『彼女について私が知っている二、三の事柄』
(*Deux ou trois choses que je sais d'elle*)は、1966年
(昭和41年)製作、ジャン＝リュック・ゴダール監督
による長篇劇映画である。



Farkasの補題の証明

今日の講義用に、新しい証明作ったよ
掃き出し法＋帰納法

読み辛い上に
なんと間違い
がある！

初期の試み

“Farkasの補題と双対定理の初等的証明,” 松井・並木, オペレーションズ・リサーチ, Vol.45 (8), 2000.

「KKT条件も単体法も一次独立もコーシー列も知らない生徒がいる授業で双対定理を証明できるか？」

おすすめの証明は、

「最適化法」, 田村・村松, 共立出版, 2002.



違いを比べてく
れたら嬉しい

Farkas の補題 証明

Farkasの補題(等式版):

任意の行列 $(A|b)$ に対し下記が成立する.

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つ.

PとDの両方が解を持つことはない.

Pの解 x^* とDの解が y^* 存在したと仮定.

$$Ax^* = b$$

$$y^{*\top}(Ax^*) = y^{*\top}b$$

$$0 \leq (y^{*\top}A)x^* = y^{*\top}b < 0$$

矛盾

非負ベクトル $(y^{*\top}A)$ と
非負ベクトル x^* の
内積は非負

両辺に y^* を掛ける =
等式系の「重み付き和」
を計算する

さっきやった

Farkas の補題 証明(1/4)

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

PとDのどちらか丁度1つのみが解を持つことを示す。

$b = 0$ ならば $x = 0$ はPの解。

$b \neq 0, A = 0$ ならば、 $y = -b$ はDの解。

$b \neq 0, A \neq 0$ 場合は、行番号と列番号を入れ替えて、 A の右上隅の要素が非ゼロと仮定できる。

行列 A の列数=1のときは明らか(?)

n 列のときに成り立つと仮定して、 $n+1$ 列のとき証明。

$A = (A' | a^\circ) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} | a^\circ)$ とすると $a_1^\circ \neq 0$ が成立。

列の基本変形を用いて、 A の1行目の1~ n 列要素をすべて0とした行列を $(\hat{A} | a^\circ)$ とする。

すなわち $\hat{A} = (\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \dots, \hat{a}^{(n)})$, $\hat{a}^{(j)} = a^{(j)} - \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} a^\circ \quad (\forall j)$

さらに、 $\hat{b} = b - \frac{b_1}{a_1^\circ} a^\circ$ とすると、第一要素が0となる。

Farkas の補題 証明(1/4)

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b = 1$$

PとDの **少なくとも1つ** が解を持つ。

$b = 0$ ならば $x = 0$ はPの解。

$b \neq 0, A = 0$ ならば、 $y = -b$ はDの解。

$b \neq 0, A \neq 0$ 場合は、行番号と列番号の要素が非ゼロと仮定できる。

行列Aの列数=1のときは明らか(?)

n 列のときに成り立つと仮定して、 $n+1$ 列のときを証明。

$A = (A' | a^\circ) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} | a^\circ)$ とすると $a_1^\circ \neq 0$ が成立。

列の基本変形を用いて、Aの1行目の1~ n 列要素をすべて0とした行列を $(\hat{A} | a^\circ)$ とする。

すなわち $\hat{A} = (\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \dots, \hat{a}^{(n)})$, $\hat{a}^{(j)} = a^{(j)} - \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} a^\circ$ ($\forall j$)

さらに、 $\hat{b} = b - \frac{b_1}{a_1^\circ} a^\circ$ とすると、第一要素が0となる。

$$A = (A' | a^\circ) =$$

*	*	...	*	●

$$(\hat{A} | a^\circ) =$$

0	0	...	0	●

Farkas の補題 証明(1/4)

$$P: Ax = b, x \geq 0 \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b \leq 0$$

PとDの **少なくとも1つ** が解を持つ。

$$A = (A' | a^\circ) =$$

*	*	...	*	●

$b = 0$ ならば $x = 0$ はPの解。

$b \neq 0, A = 0$ ならば、 $y = -b$ はDの解。

$b \neq 0, A \neq 0$ 場合は、行番号と列番号の要素が非ゼロと仮定できる。

$$(\hat{A} | a^\circ) =$$

0	0	...	0	●

$$\hat{b} =$$

0

行列Aの列数=1のときは明らか

n 列のときに成り立つと仮定して、 $n+1$ 列のときに証明。

$A = (A' | a^\circ) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} | a^\circ)$ とすると $a_1^\circ \neq 0$ が成立。

列の基本変形を用いて、Aの1行目の1～ n 列要素をすべて0とした行列を $(\hat{A} | a^\circ)$ とする。

$$\text{すなわち } \hat{A} = (\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \dots, \hat{a}^{(n)}), \hat{a}^{(j)} = a^{(j)} - \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} a^\circ \quad (\forall j)$$

さらに、 $\hat{b} = b - \frac{b_1}{a_1^\circ} a^\circ$ とすると、第一要素が0となる。

証明の構造

$$P: Ax = b, x \geq 0, \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

$$A = (A' | a^\circ), (\hat{A} | a^\circ), \hat{b}$$

2者択一の定理の帰納法

$$P1: \hat{A}\hat{x} = \hat{b}, \hat{x} \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \neg \exists^{(1)} \\ \exists \hat{x}^*{}^{(2)} \end{array} \right. \rightarrow \exists \hat{y}^*$$

$$D1: \hat{y}^T \hat{A} \geq 0^T, \hat{y}^T \hat{b} < 0$$

$\hat{y}^*$ はDの解 → 証明終了

$$\exists x_{n+1}^*, A \begin{pmatrix} \hat{x}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} = b, \hat{x}^* \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1}^* \geq 0 : \begin{pmatrix} \hat{x}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} \text{はPの解} \rightarrow \text{証明終了} \\ x_{n+1}^* < 0 \text{の場合} \end{array} \right.$$

矛盾

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{**T} a^\circ < 0 \text{の場合} \\ y^{**T} a^\circ \geq 0 : y^{**} \text{はDの解} \rightarrow \text{証明終了} \end{array} \right.$$

(2-2)

$$\exists y^{**}$$

(2-1)

$$P2: A'\tilde{x} = b, \tilde{x} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^{**} \\ 0 \end{pmatrix} \text{はPの解} \rightarrow \text{証明終了}$$

$$\exists \tilde{x}^{**}$$

$$D2: y^T A' \geq 0^T, y^T b < 0$$

2者択一の定理の帰納法

Farkas の補題 証明(2/4)

(1) $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}, \hat{x} \geq 0$ が解を持たない場合。

帰納法の仮定より、 $\hat{y}^\top \hat{A} \geq 0^\top, \hat{y}^\top \hat{b} < 0$ が解 $\hat{y}^*$ を持つ。

$\hat{A}$ は第一行がすべて0、 $\hat{b}$ は第一要素が0より、 $\hat{y}^*$ の第一要素を何に変更しても、 $\hat{y}^\top \hat{A} \geq 0^\top, \hat{y}^\top \hat{b} < 0$ の解のままである。

$$\hat{y}^{*\top} (\hat{A} | a^\circ) = \hat{y}^{*\top} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} & \bullet \\ \hline \text{ } & \text{ } \end{array} \geq (0^\top | *) \quad \hat{y}^{*\top} \hat{b} = \hat{y}^{*\top} \begin{array}{c} 0 \\ \hline \text{ } \end{array} < 0$$

そこで、 $\hat{y}^*$ の第一要素は $\hat{y}^{*\top} a^\circ = 0$ が成り立つ値であるとする、 $\hat{y}^*$ は $D: \mathbf{y}^\top A \geq 0^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0$ の解である。

$$\begin{aligned} \because \forall j, \hat{y}^{*\top} a^{(j)} &= \hat{y}^{*\top} (a^{(j)} + \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} a^\circ) = \hat{y}^{*\top} a^{(j)} + 0 \geq 0, \text{ かつ、} \\ \hat{y}^{*\top} a^\circ &= 0. \text{ ゆえに } \hat{y}^{*\top} A = \hat{y}^{*\top} (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} | a^\circ) \geq 0^\top. \\ \text{かつ、} \hat{y}^{*\top} \mathbf{b} &= \hat{y}^{*\top} (\hat{\mathbf{b}} + \frac{b_1}{a_1^\circ} a^\circ) = \hat{y}^{*\top} \hat{\mathbf{b}} + 0 < 0 \text{ である。} \end{aligned}$$

Farkas の補題 証明(3/4)

(2) $\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ が解が解 $\hat{\mathbf{x}}^*$ を持つ場合。

$$\left[\exists x_{n+1}^*, A \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{x}}^* \geq \mathbf{0} \right] \text{ が成り立つ。}$$

$\because A = (A' | \mathbf{a}^\circ) = (\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)} | \mathbf{a}^\circ)$ である。

$$A'\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}^{(j)} \hat{x}_j^* - \mathbf{b}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\widehat{\mathbf{a}^{(j)}} + \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} \mathbf{a}^\circ \right) \hat{x}_j^* - \left(\hat{\mathbf{b}} + \frac{b_1}{a_1^\circ} \mathbf{a}^\circ \right)$$

$$= (\hat{A}\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{b}}) + \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} \hat{x}_j^* - \frac{b_1}{a_1^\circ} \right) \mathbf{a}^\circ = \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} \hat{x}_j^* - \frac{b_1}{a_1^\circ} \right) \mathbf{a}^\circ$$

ゆえに $x_{n+1}^* = - \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_1^{(j)}}{a_1^\circ} \hat{x}_j^* - \frac{b_1}{a_1^\circ} \right)$ とすれば、

$$A \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} - \mathbf{b} = A'\hat{\mathbf{x}}^* + x_{n+1}^* \mathbf{a}^\circ - \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ が成立する。}$$

Farkas の補題 証明(4/4)

(2) $\left[\exists \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{x}}^* \geq \mathbf{0} \right]$ が成立。

$x_{n+1}^* \geq 0$ ならば $\mathbf{x}^*$ は P の解 (証明終了)。

$x_{n+1}^* < 0$ と仮定する。

(2-1) $\mathbf{y}^\top A' \geq \mathbf{0}^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0$ が解を持たない場合。

帰納法の仮定より、 $A' \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ が解 $\tilde{\mathbf{x}}^{**}$ を持つ。

$\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^{**} \\ 0 \end{pmatrix}$ は P の解 (証明終了)

(2-2) $\mathbf{y}^\top A' \geq \mathbf{0}^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0$ が解 $\mathbf{y}^{**}$ を持つ場合。

$\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ \geq 0$ ならば $\mathbf{y}^{**}$ は D の解 (証明終了)。

$\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ < 0$ の場合。

$$\begin{aligned} 0 > \mathbf{y}^{**\top} \mathbf{b} &= \mathbf{y}^{**\top} A \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} = \mathbf{y}^{**\top} (A' \hat{\mathbf{x}}^* + x_{n+1}^* \mathbf{a}^\circ) \\ &= (\mathbf{y}^{**\top} A') \hat{\mathbf{x}}^* + (\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ) x_{n+1}^* \geq 0 + (\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ) x_{n+1}^* > 0 \text{ 矛盾} \end{aligned}$$

Farkas の補題 証明(4/4)

(2) $\left[\exists \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{x}}^* \geq \mathbf{0} \right]$ が成立。

$x_{n+1}^* \geq 0$ ならば $\mathbf{x}^*$ は P の解 (証明終了)。

$x_{n+1}^* < 0$ と仮定する。

(2-1) $\mathbf{y}^\top A' \geq \mathbf{0}^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0$ が解を持たない場合。

帰納法の仮定より、 $A' \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ が解 $\tilde{\mathbf{x}}^{**}$ を持つ。

$\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^{**} \\ 0 \end{pmatrix}$ は P の解 (証明終了)

(2-2) $\mathbf{y}^\top A' \geq \mathbf{0}^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0$ が解 $\mathbf{y}^{**}$ を持つ場合。

$\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ \geq 0$ ならば $\mathbf{y}^{**}$ は D の解 (証明終了)。

$\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ < 0$ の場合。

$$A = (A' | \mathbf{a}^\circ)$$

$$0 > \mathbf{y}^{**\top} \mathbf{b} = \mathbf{y}^{**\top} A \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} = \mathbf{y}^{**\top} (A' \hat{\mathbf{x}}^* + x_{n+1}^* \mathbf{a}^\circ)$$

$$= (\mathbf{y}^{**\top} A') \hat{\mathbf{x}}^* + (\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ) x_{n+1}^* \geq 0 + (\mathbf{y}^{**\top} \mathbf{a}^\circ) x_{n+1}^* > 0 \text{ 矛盾}$$

証明の構造

$$P: Ax = b, x \geq 0, \quad D: y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$$

$$A = (A' | a^\circ), (\hat{A} | a^\circ), \hat{b}$$

2者択一の定理の帰納法

$$P1: \hat{A}\hat{x} = \hat{b}, \hat{x} \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \neg \exists^{(1)} \\ \exists \hat{x}^* \end{array} \right. \xrightarrow{(2)} \exists \hat{y}^*$$

$$D1: \hat{y}^T \hat{A} \geq 0^T, \hat{y}^T \hat{b} < 0$$

$\hat{y}^*$ はDの解 → 証明終了

$$\exists x_{n+1}^*, A \begin{pmatrix} \hat{x}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} = b, \hat{x}^* \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1}^* \geq 0 : \begin{pmatrix} \hat{x}^* \\ x_{n+1}^* \end{pmatrix} \text{はPの解} \rightarrow \text{証明終了} \\ x_{n+1}^* < 0 \text{の場合} \end{array} \right.$$

矛盾

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{**T} a^\circ < 0 \text{の場合} \\ y^{**T} a^\circ \geq 0 : y^{**} \text{はDの解} \rightarrow \text{証明終了} \end{array} \right.$$

(2-2)

$$\exists y^{**}$$

$$\neg \exists^{(2-1)}$$

$$P2: A'\tilde{x} = b, \tilde{x} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^{**} \\ 0 \end{pmatrix} \text{はPの解} \rightarrow \text{証明終了}$$

$$\exists \tilde{x}^{**}$$

$$D2: y^T A' \geq 0^T, y^T b < 0$$

2者択一の定理の帰納法

Duality Theory (双対理論)

- dual problem (双対問題)
- duality theorem (双対定理)
(「相対」ではない！)

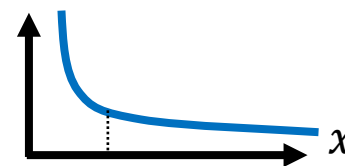
線形計画の基本定理

任意の線形計画問題は、

- (1)最適解を持つ、
 - (2)許容解を持たない、
 - (3)非有界である、
- のどれか一つの性質を持つ。

今日は「もう知ってる」
ことにする！

$$\min. 1/x \quad \text{s.t. } x \geq 1.$$



非有界の定義

任意の値 $M \in \mathbb{R}$ に対し、与えられた問題の許容解で、その目的関数値の値が M より良いものが存在する。

最大化: $\max. f(x) \quad \text{s.t. } x \in \Omega. \quad [\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \Omega, M < f(x)].$

最小化: $\min. f(x) \quad \text{s.t. } x \in \Omega. \quad [\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \Omega, M > f(x)].$

双対問題とは？

下記の最大化問題について考えよう！

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 20x_1 + 10x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 + x_2 \leq 6, \\ & && 3x_1 + x_2 \leq 12, \\ & && x_1 + 2x_2 \leq 10. \end{aligned}$$

（変数の非負制約はありません）

下界： $(x_1, x_2) = (2, 3)$ は許容解であることが簡単に確認できる。ゆえに、対応する目的関数値

$20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 70$ は、最適値の下界。

上界：問題を解くことなく、上界を得るには？

Dual Bound (双対界) を出す

下記の最大化問題について考えよう！

$$\begin{aligned} &\text{maximize } 20x_1 + 10x_2 \\ &\text{subject to } \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 12, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10. \end{aligned} \end{aligned}$$

問題を解かずに上界を得るには？

$$\begin{array}{rcl} 0 \times (x_1 + x_2 \leq 6) & 5 \times (x_1 + x_2 \leq 6) & \\ 6 \times (3x_1 + x_2 \leq 12) & 5 \times (3x_1 + x_2 \leq 12) & \\ 2 \times (x_1 + 2x_2 \leq 10) & 0 \times (x_1 + 2x_2 \leq 10) & \\ \hline 20x_1 + 10x_2 \leq 92 & 20x_1 + 10x_2 \leq 90 & \end{array}$$

より良い
(小さい) 上界

不等式制約を非負重みで足し合わせ、目的関数ベクトルをつくる。
(負だと不等号が反転する)

Dual Bound (双対界) を出す

下記の最大化問題について考えよう！

$$\begin{aligned} &\text{maximize } 20x_1 + 10x_2 \\ &\text{subject to } \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 12, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10. \end{aligned} \end{aligned}$$

問題を解かずに上界を得るには？

$$y_1 \times (x_1 + x_2 \leq 6)$$

$$y_2 \times (3x_1 + x_2 \leq 12)$$

$$y_3 \times (x_1 + 2x_2 \leq 10)$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 6y_1 + 12y_2 + 10y_3$$

$$\text{min. } 6y_1 + 12y_2 + 10y_3$$

$$\text{s.t. } y_1 + 3y_2 + y_3 = 20,$$

$$y_1 + y_2 + 2y_3 = 10,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

最小上界を求める問題

これが
双対問題！

双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}. \end{array}$$

不等式の制約式を、非負重み $\mathbf{y}$ で重み付き和する事によって、以下の(1本の)不等式を得る

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{Ax} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b}.$$

surrogate constraint (代理制約)

surrogate mother

もし $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{c}^\top$ が成り立つならば、

$\mathbf{y}^\top \mathbf{b}$ は最適値(最大値)の上界になる.

最も良い(小さな)上界を与える $\mathbf{y}$ を求める問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \\ \text{subject to} & \mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

これが
双対問題！

代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

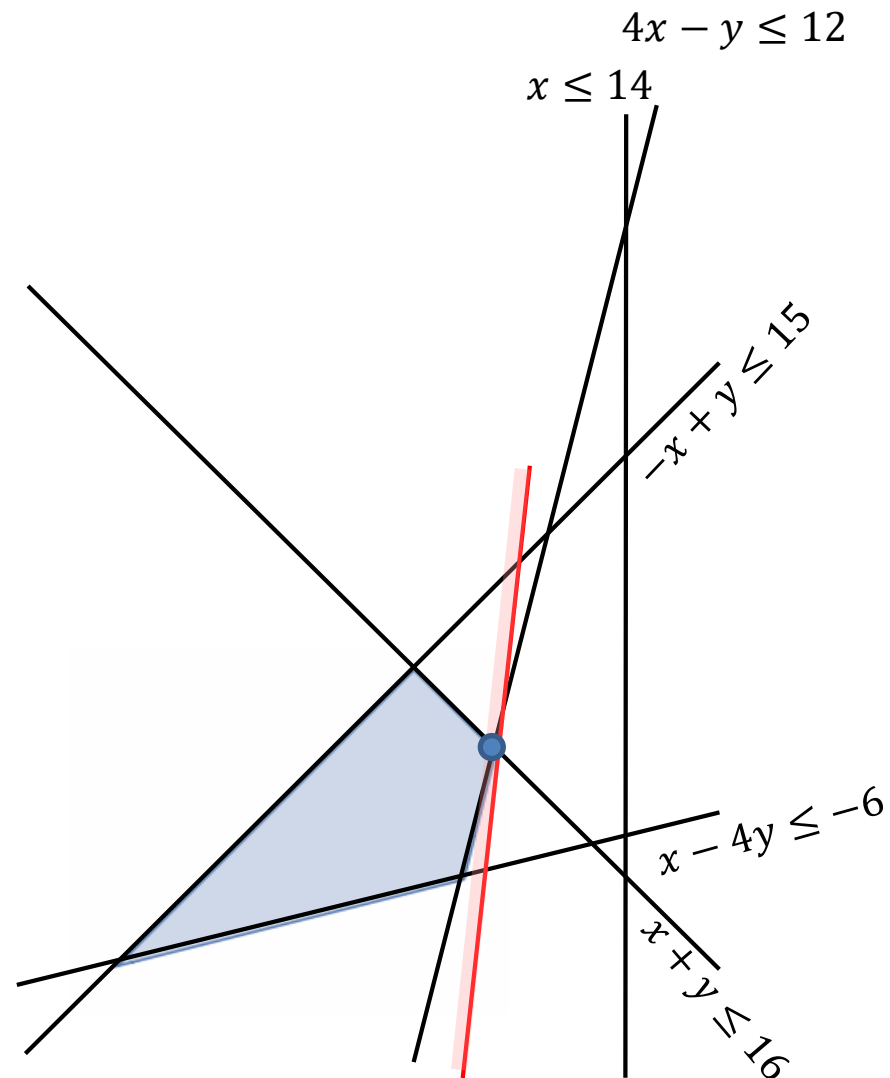
$$x - 4y \leq -6,$$

$$x + y \leq 16,$$

$$x \leq 14.$$

$$\text{最適解: } \left(\frac{28}{5}, \frac{52}{5}\right)$$

$$\text{最適値: } 40$$



代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

$$x - 4y \leq -6,$$

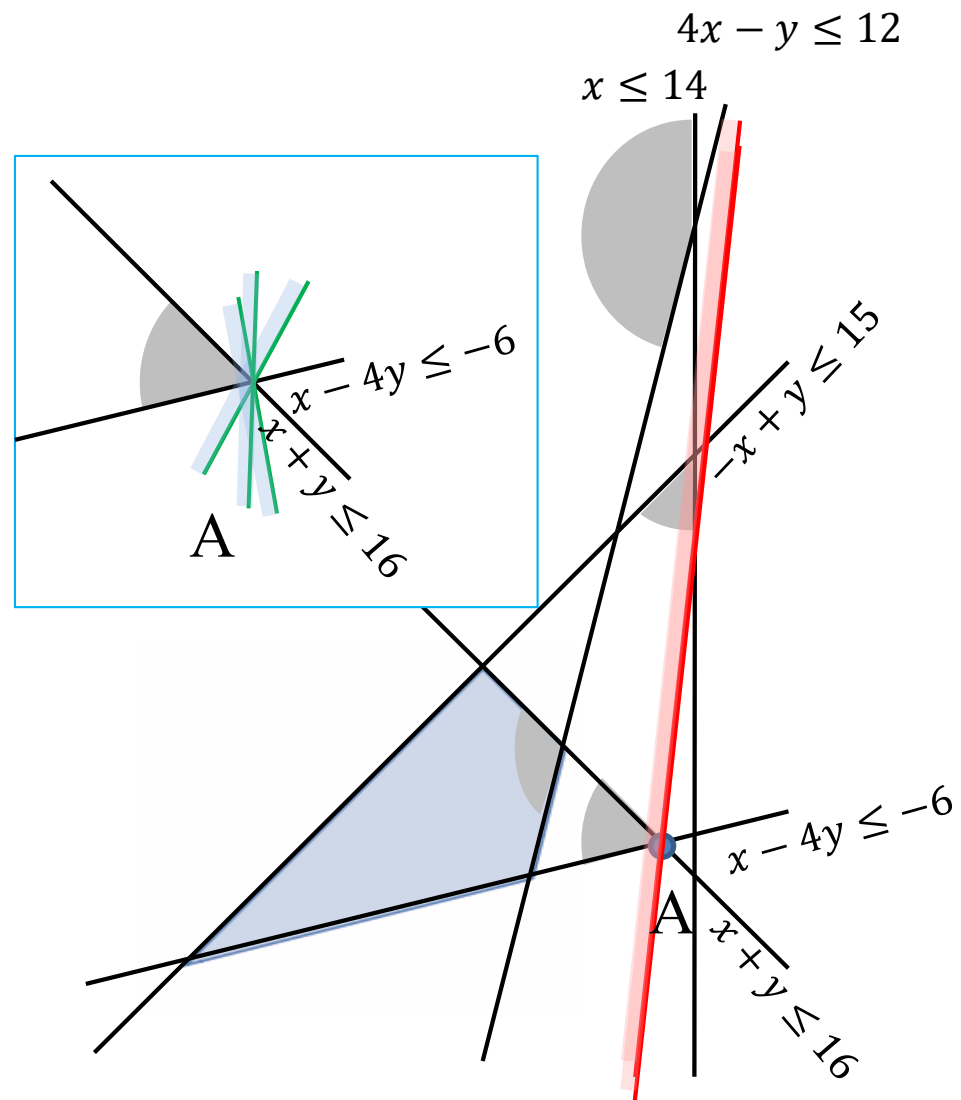
$$x + y \leq 16,$$

$$x \leq 14.$$

$$A: 2 \times [x - 4y \leq -6]$$

$$7 \times [x + y \leq 16]$$

$$\hline 9x - y \leq 120$$



代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

$$x - 4y \leq -6,$$

$$x + y \leq 16,$$

$$x \leq 14.$$

$$A: 2 \times [x - 4y \leq -6]$$

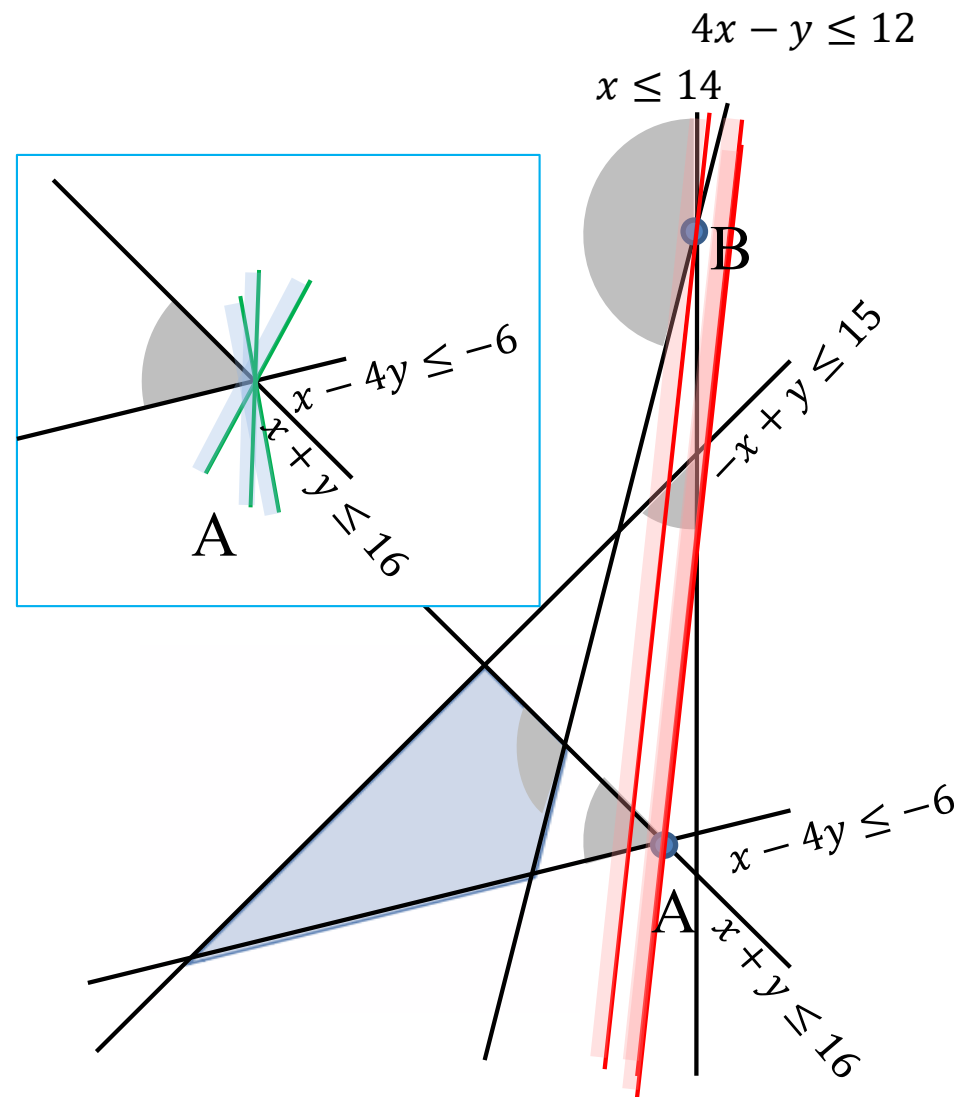
$$7 \times [x + y \leq 16]$$

$$\hline 9x - y \leq 120$$

$$B: 1 \times [4x - y \leq 12]$$

$$5 \times [x \leq 14]$$

$$\hline 9x - y \leq 82$$



代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

$$x - 4y \leq -6,$$

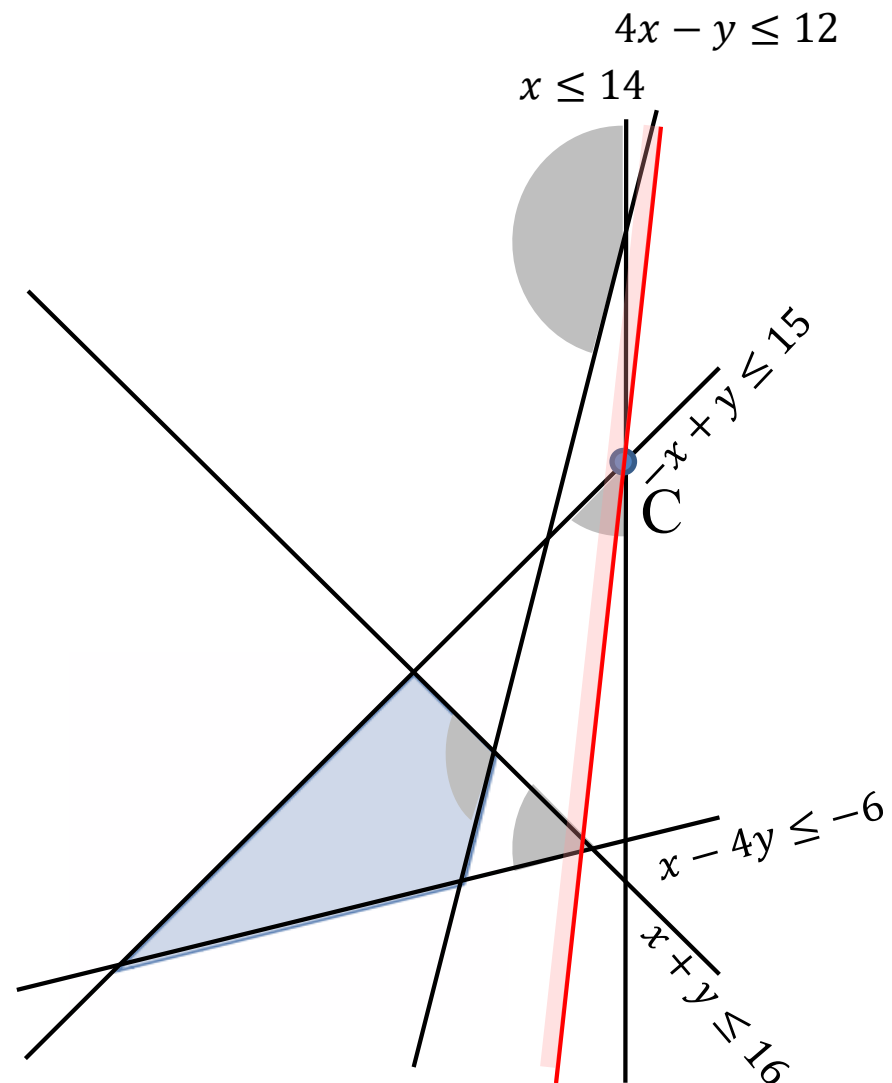
$$x + y \leq 16,$$

$$x \leq 14.$$

$$C: ? \times [-x + y \leq 15]$$

$$\frac{? \times [x \leq 14]}{9x - y \leq ?}$$

$$9x - y \leq ?$$



代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

$$x - 4y \leq -6,$$

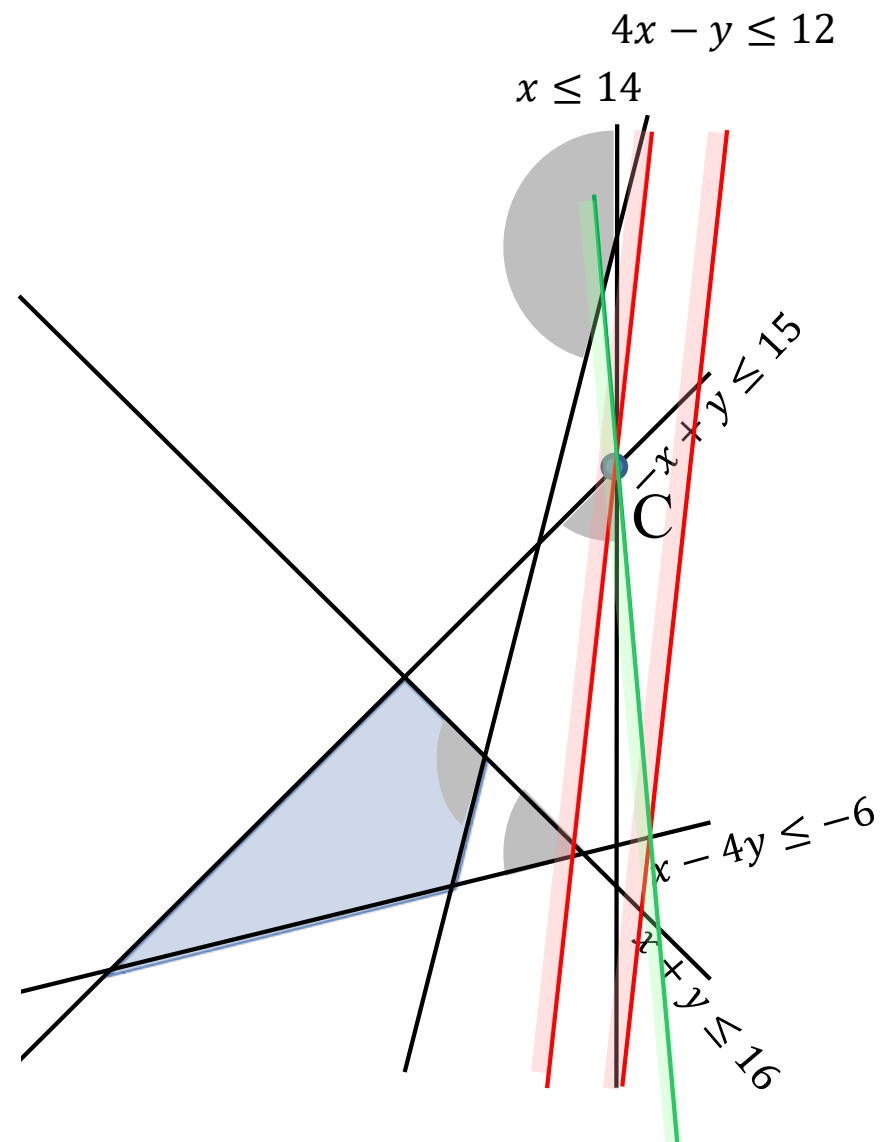
$$x + y \leq 16,$$

$$x \leq 14.$$

$$\begin{array}{rcl} C: & 3 \times [-x + y \leq 15] & \\ & 11 \times [x \leq 14] & \\ & 1 \times [x - 4y \leq -6] & \\ \hline & 9x - y \leq 192 & \end{array}$$

代理制約式:

与えられた不等式を
非負重み和して得られる不等式。
与えられた不等式系の解集合は、
代理制約式の解領域に含まれる。



代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

$$x - 4y \leq -6,$$

$$x + y \leq 16,$$

$$x \leq 14.$$

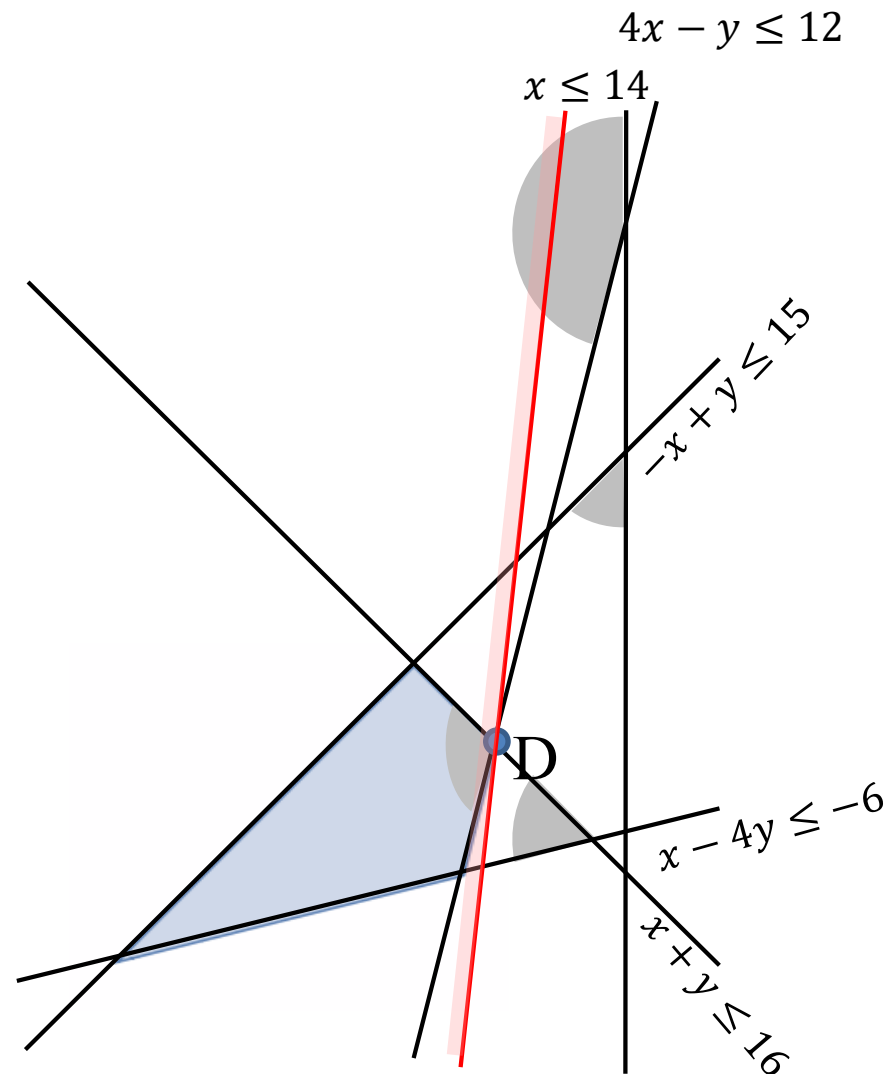
$$D: 2 \times [4x - y \leq 12]$$

$$1 \times [x + y \leq 16]$$

$$9x - y \leq 40$$

$$\text{最適解: } D = \left(\frac{28}{5}, \frac{52}{5} \right)$$

$$\text{最適値: } 40$$



代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

$$x - 4y \leq -6,$$

$$x + y \leq 16,$$

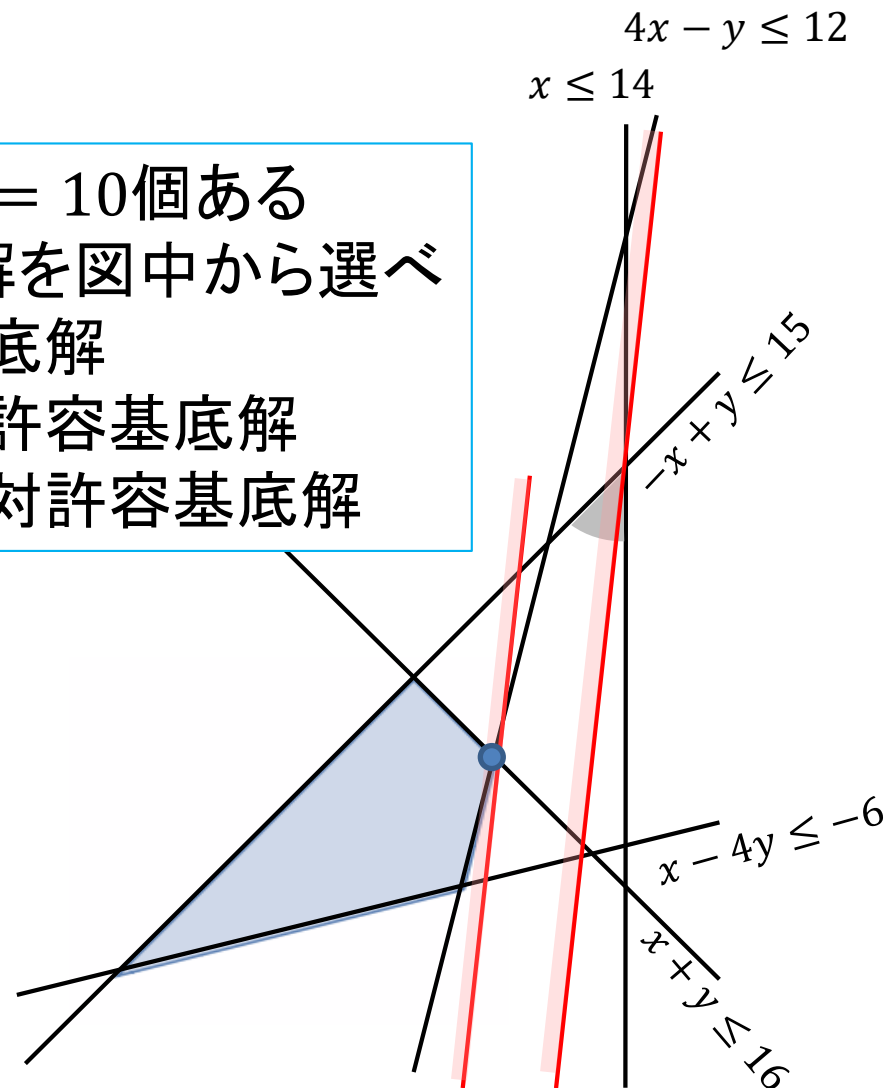
$$x \leq 14.$$

基底解は ${}_5C_2 = 10$ 個ある
下記の基底解を図中から選べ

- (1) 全ての基底解
- (2) 全ての主許容基底解
- (3) 全ての双対許容基底解

$$\text{最適解: } \left(\frac{28}{5}, \frac{52}{5} \right)$$

$$\text{最適値: } 40$$



代理制約式 (surrogate constraints)

$$P: \max. 9x - y$$

$$\text{s.t. } 4x - y \leq 12,$$

$$-x + y \leq 15,$$

$$x - 4y \leq -6,$$

$$x + y \leq 16,$$

$$x \leq 14.$$

基底解は ${}_5C_2 = 10$ 個ある
下記の基底解を図中から選べ

(1) 全ての基底解

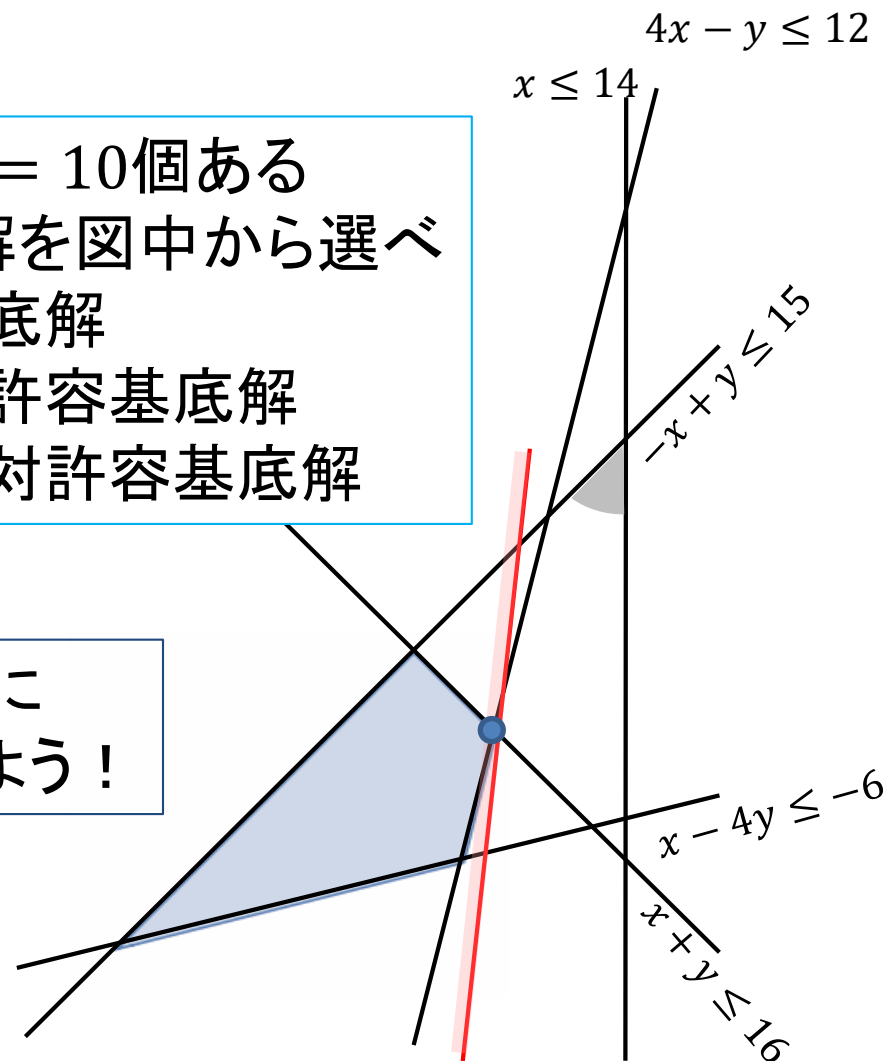
(2) 全ての主許容基底解

(3) 全ての双対許容基底解

$$\text{最適解: } \left(\frac{28}{5}, \frac{52}{5} \right)$$

$$\text{最適値: } 40$$

(2) (3) を右図に
書き込んでみよう!



弱双対定理

主問題: maximize $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$
 subject to $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

双対問題: minimize $\mathbf{y}^\top \mathbf{b}$
 subject to $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$,

弱双対定理 :

$\mathbf{x}$: 主実行可能解、 $\mathbf{y}$: 双対実行可能解、ならば

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b}.$$

[証明] $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b}$

(強)双対定理

$$\begin{array}{ll} \text{主問題:} & \text{maximize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}. \\ \text{双対問題:} & \text{minimize} \quad \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{c}^\top, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

(強)双対定理 :

主問題と双対問題の両方が許容解を持つ

→両方が最適解を持ち、最適値は同じ値となる

証明は演習にしましょう！

主双対ペア

主問題: maximize $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$
 subject to $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$

双対問題: minimize $\mathbf{y}^\top \mathbf{b}$
 subject to $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0},$

$M = A^\top$ と置けば、下記の主双対問題のペアを得る

主問題: maximize $\mathbf{x}^\top \mathbf{c}$
 subject to $\mathbf{x}^\top M \leq \mathbf{b}^\top.$

双対問題: minimize $\mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
 subject to $M\mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$

主双対ペア

主問題: maximize $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$
 subject to $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$

双対問題: minimize $\mathbf{y}^\top \mathbf{b}$
 subject to $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0},$

$M = A^\top$ と置けば、下記の主双対問題のペアを得る

~~主問題:~~ maximize $\mathbf{x}^\top \mathbf{c}$
 双対問題 subject to $\mathbf{x}^\top M \leq \mathbf{b}^\top.$

~~双対問題:~~ minimize $\mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
 主問題 subject to $M\mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$

「デュアル（双対）」は古い数学用語ですが、「プライマル（主問題）」の歴史は意外と浅く、1954年頃に始まります。

オーチャード＝ヘイズが「双対に対する元の問題を指す言葉が必要だ」と述べたのを受け、私の父トビアス・ダンツィクが提案したものでした。

強双対定理の効用

(1) 双対の最適解は、主問題の解の最適性を示す証拠となる。

最適解である $\Leftrightarrow$ それより良い解は存在しない

何かが『存在することの証明』より『存在しない証明』の方が、一般的に難しい。

双対問題は、「それより良い解は存在しない」を「同じ値の双対解が存在する」ことで保証することを可能にしてくれる

(2) 線形計画問題を、ただの線形不等式系の(許容)解を求める問題に変形する。

(目的関数の削除ができる)

主問題: $\max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}.$

双対問題: $\min. \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{c}^\top, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0},$

$[\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^\top \mathbf{b}]$

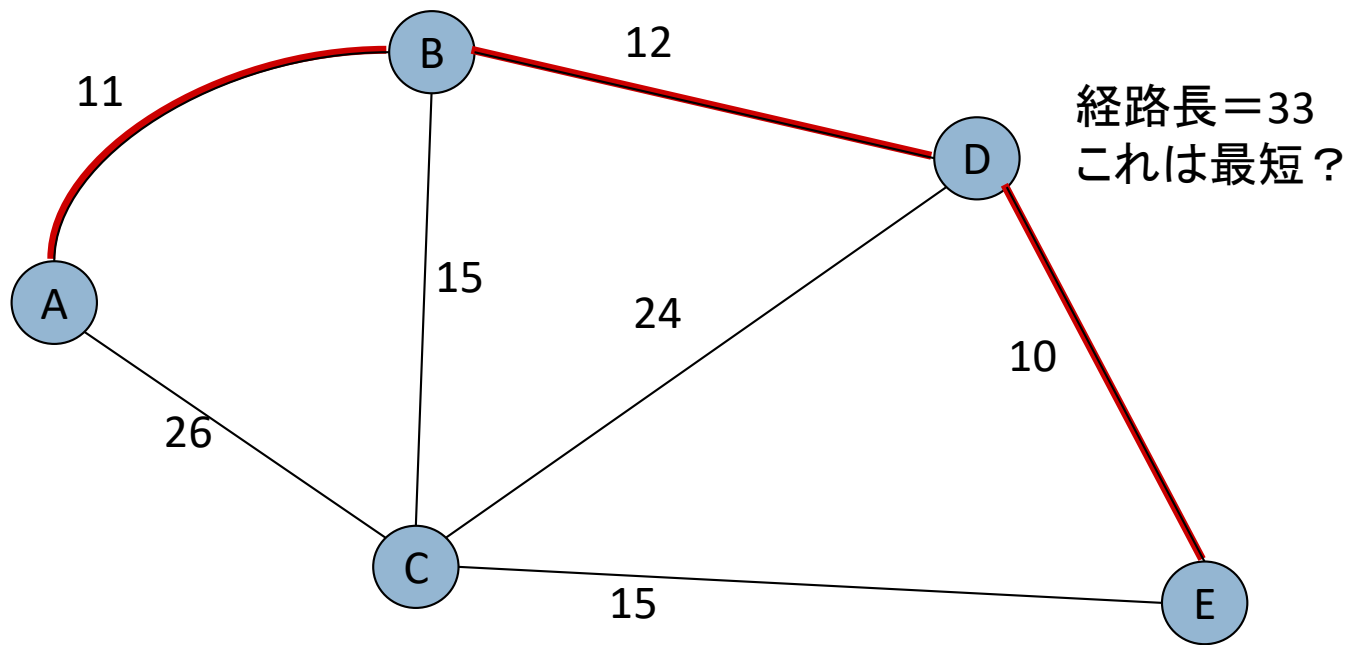
最短路問題

双対問題の例

最短路問題

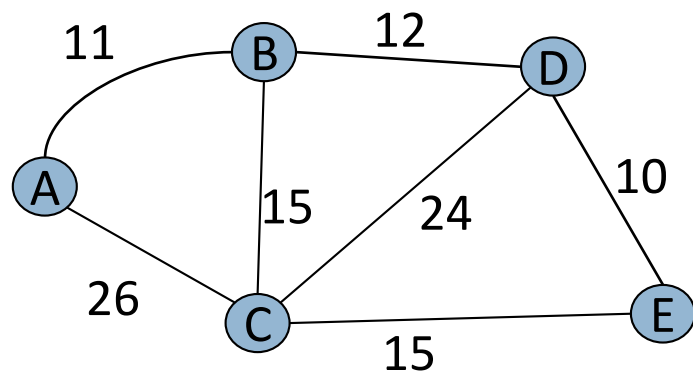
AからEへの最短経路を求めよ

(各枝の長さは非負である)



双対問題の例

最短路問題: AからEへの最短経路を求めよ



AからEへ単位量(1)のフローを流す
(1万人? が歩く)
この時の総移動距離を最小化

y_{AB} : AからBへ移動するフロー量(人数)

y_{BA} : BからAへ移動するフロー量(人数)

y_{BC} : BからCへ移動するフロー量(人数)

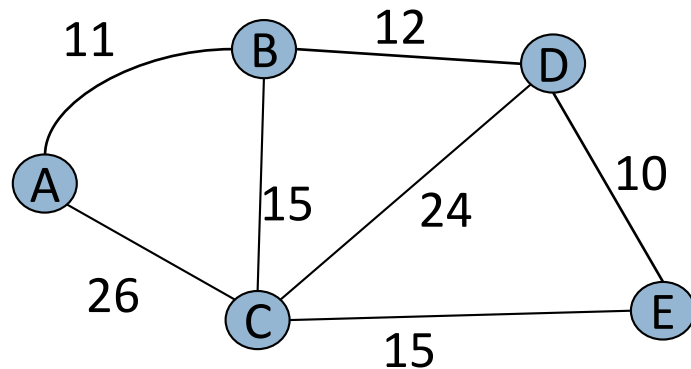
y_{CB} : CからBへ移動するフロー量(人数)

.....

実は全員が最短路に沿って歩く!

双対問題の例

最短路問題: AからEへの最短経路を求めよ



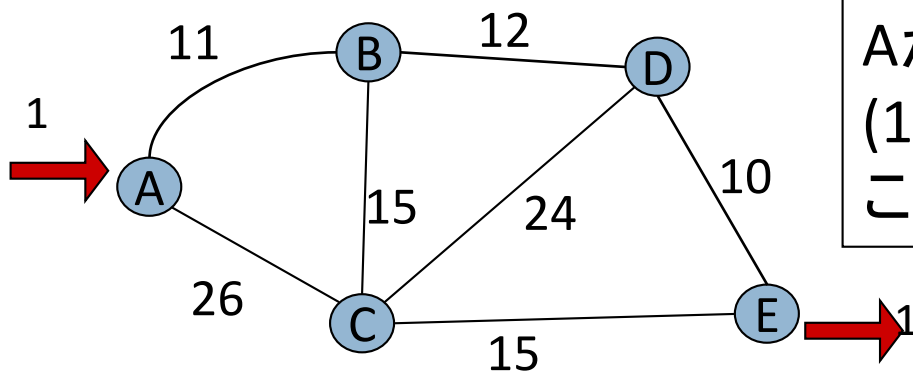
AからEへ単位量(1)のフローを流す
(1万人? が歩く)
この時の総移動距離を最小化

$$\begin{aligned}
 \min. \quad & 11y_{AB} + 11y_{BA} + 26y_{AC} + 26y_{CA} \\
 & + 15y_{BC} + 15y_{CB} + 12y_{BD} + 12y_{DB} \\
 & + 24y_{CD} + 24y_{DC} + 15y_{CE} + 15y_{EC} \\
 & + 10y_{DE} + 10y_{ED}
 \end{aligned}$$

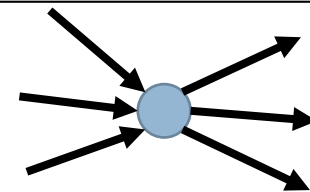
s. t.

双対問題の例

最短路問題: AからEへの最短経路を求めよ



AからEへ単位量(1)のフローを流す
(1万人? が歩く)
この時の総移動距離を最小化



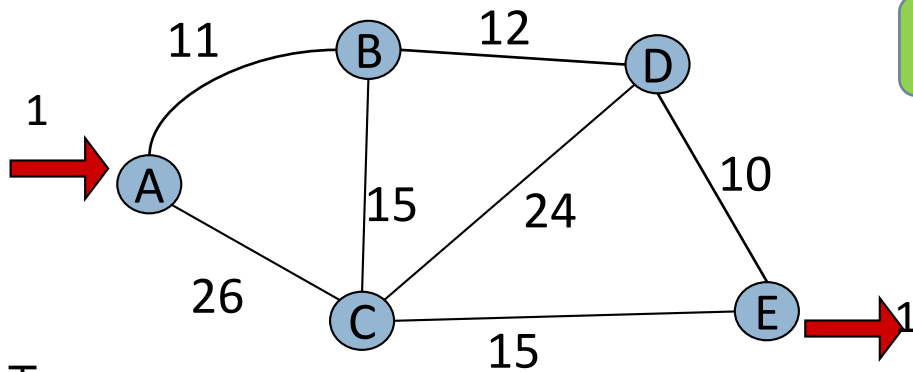
$$\begin{aligned} \min. & 11y_{AB} + 11y_{BA} + 26y_{AC} + 26y_{CA} + 15y_{BC} + 15y_{CB} + 12y_{BD} + 12y_{DB} \\ & + 24y_{CD} + 24y_{DC} + 15y_{CE} + 15y_{EC} + 10y_{DE} + 10y_{ED} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & 1 + y_{BA} + y_{CA} = y_{AB} + y_{AC}, \\ & y_{AB} + y_{CB} + y_{DB} = y_{BA} + y_{BC} + y_{BD}, \\ & y_{AC} + y_{BC} + y_{DC} + y_{EC} = y_{CA} + y_{CB} + y_{CD} + y_{CE}, \\ & y_{BD} + y_{CD} + y_{ED} = y_{DB} + y_{DC} + y_{DE}, \\ & y_{CE} + y_{DE} = y_{EC} + y_{ED} + 1, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

(Aでの流量保存則),
(Bでの流量保存則),
(Cでの流量保存則),
(Dでの流量保存則),
(Eでの流量保存則),

双対問題の例

最短路問題: AからEへの最短経路を求めよ



行列形式で書いてみよう!

変数ベクトル

目的関数係数

$$\mathbf{y}^\top = (y_{AB}, y_{BA}, y_{AC}, y_{CA}, y_{BC}, y_{CB}, y_{BD}, y_{DB}, y_{CD}, y_{DC}, y_{CE}, y_{EC}, y_{DE}, y_{ED})$$

$$\mathbf{b}^\top = (11, 11, 26, 26, 15, 15, 12, 12, 24, 24, 15, 15, 10, 10)$$

$$A^\top = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline -1 & 1 & & & 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & & \\ \hline & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & -1 & 1 & -1 & & \\ \hline & & & & & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & -1 \\ \hline & & & & & & & & & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$\mathbf{c} =$

1
0
0
0
-1

係数行列

右辺項ベクトル

D : min. $\mathbf{y}^\top \mathbf{b}$ s. t. $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$.

D : min. $\mathbf{y}^\top \mathbf{b}$ s. t. $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq 0$. P: max. $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ s. t. $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

主問題

$$\mathbf{y}^\top = (y_{AB}, y_{BA}, y_{AC}, y_{CA}, y_{BC}, y_{CB}, y_{BD}, y_{DB}, y_{CD}, y_{DC}, y_{CE}, y_{EC}, y_{DE}, y_{ED})$$

$$\mathbf{b}^\top = (11, 11, 26, 26, 15, 15, 12, 12, 24, 24, 15, 15, 10, 10)$$

$$A^\top = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline -1 & 1 & & & 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & & \\ \hline & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & -1 & 1 & -1 & & \\ \hline & & & & & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & -1 \\ \hline & & & & & & & & & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{c} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ s. t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \quad \mathbf{x}^\top = (x_A, x_B, x_C, x_D, x_E)$$

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ s. t. } \mathbf{x}^\top A^\top \leq \mathbf{b}^\top.$$

主問題の変数
($A^\top$ の行(頂点)でインデックス)

$$\max. x_A - x_E$$

$$\text{s. t. } x_A - x_B \leq 11, \quad x_B - x_C \leq 15, \quad x_C - x_D \leq 24, \quad x_D - x_E \leq 10,$$

$$x_B - x_A \leq 11, \quad x_C - x_B \leq 15, \quad x_D - x_C \leq 24, \quad x_E - x_D \leq 10.$$

$$x_A - x_C \leq 26, \quad x_B - x_D \leq 12, \quad x_C - x_E \leq 15,$$

$$x_C - x_A \leq 26, \quad x_D - x_B \leq 12, \quad x_E - x_C \leq 15,$$

主問題

$$\mathbf{y}^\top = (y_{AB}, y_{BA}, y_{AC}, y_{CA}, y_{BC}, y_{CB}, y_{BD}, y_{DB}, y_{CD}, y_{DC}, y_{CE}, y_{EC}, y_{DE}, y_{ED})$$

$$\mathbf{b}^\top = (11, 11, 26, 26, 15, 15, 12, 12, 24, 24, 15, 15, 10, 10)$$

$$A^\top = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline -1 & 1 & & & 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & & \\ \hline & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & -1 & 1 & -1 & & \\ \hline & & & & & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & -1 \\ \hline & & & & & & & & & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{c} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ s. t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \quad \mathbf{x}^\top = (x_A, x_B, x_C, x_D, x_E)$$

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ s. t. } \mathbf{x}^\top A^\top \leq \mathbf{b}^\top.$$

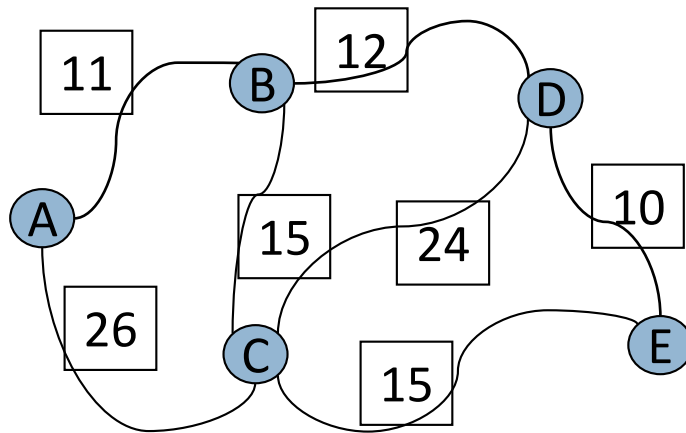
主問題の変数
($A^\top$ の行(頂点)でインデックス)

$$\max. x_A - x_E$$

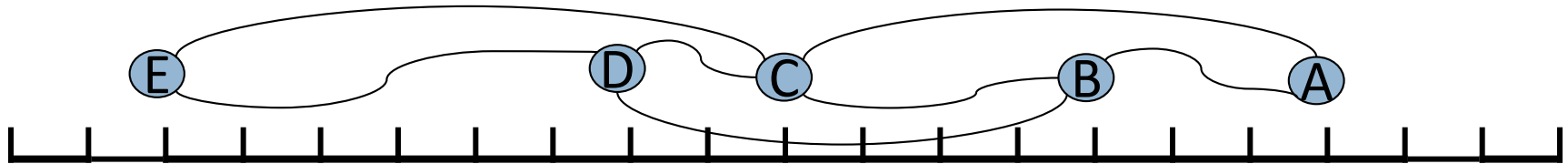
$$\text{s. t. } \begin{array}{llll} |x_A - x_B| \leq 11, & |x_B - x_C| \leq 15, & |x_C - x_D| \leq 24, & |x_D - x_E| \leq 10, \\ |x_A - x_C| \leq 26, & |x_B - x_D| \leq 12, & |x_C - x_E| \leq 15. & \end{array}$$

双対問題の例

最短路問題: AからEへの最短経路を求めよ



左図のように, 頂点の球を,
枝長さの紐で結んで, AとE
の頂点(球)を持って引っ張る



$$\max. x_A - x_E$$

$$\text{s. t. } |x_A - x_B| \leq 11, \quad |x_B - x_C| \leq 15, \quad |x_C - x_D| \leq 24, \quad |x_D - x_E| \leq 10, \\ |x_A - x_C| \leq 26, \quad |x_B - x_D| \leq 12, \quad |x_C - x_E| \leq 15.$$

$x_A, x_B, \dots, x_E$ は, それぞれの頂点(球)の数直線上での座標

感度分析と潜在価格

生産計画問題 (資源配分問題)

供給可能な葡萄を使い、収益最大になるようにワインを作る

種 類	赤	白	ロゼ	最大供給量
Cabernet:	2	0	0	4 [t]
Merlot:	1	0	2	8 [t]
Semillon:	0	3	1	6 [t]
収益:	3	4	2	[百万円/単位]

x_1 :赤の製造量 x_2 :白の製造量 x_3 :ロゼの製造量

$$\max. 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t. } 2x_1 \leq 4,$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 8,$$

$$3x_2 + x_3 \leq 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

生産計画問題 (資源配分問題)

資源の集合(ぶどう): $M = \{1, 2, \dots, m\}$

製品の集合(ワイン): $P = \{1, 2, \dots, p\}$

a_{ij} : 製品 j を1単位製造するには、資源 i が

$a_{ij} (\geq 0)$ 単位必要である

w_j : 製品 j を1単位売って得られる利益が w_j (\$)

資源量ベクトル $\mathbf{b}^\top = (b_1, b_2, \dots, b_m) \geq \mathbf{0}$

この会社は利益を最大にする、製品の生産量を知りたい

$\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \dots, x_p)$: 各製品の生産量変数(非負)

最大利益 = $\max\{\mathbf{w}^\top \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

感度分析

生産計画問題

$$\max. \mathbf{w}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m$: (使用可能な) 資源量ベクトル

$\mathbf{w}^\top \mathbf{x}$: (総)利益

感度分析

第 i 資源が微小量 ε 増加したら, 収益はどのくらい増加するのか?

$\mathbf{e}^i \in \mathbb{R}_+^m$: 第 i 要素のみ1(他は0)のベクトル

$$\max. \mathbf{w}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{e}^i, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

この問題を(一から)解く手間を書けず、
この問題の(たぶんでいいから)最適値を知りたい

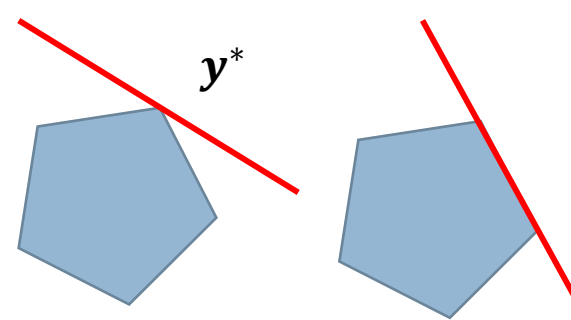
0
1
0
⋮
0
0

第 i 要素

感度分析

$$P: \max. \mathbf{w}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

$$D: \min. \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \quad \text{s. t. } \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{w}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$



$$P': \max. \mathbf{w}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{e}^i, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

$$D': \min. \mathbf{y}^\top (\mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{e}^i) \quad \text{s. t. } \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{w}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

DとD'は、許容領域は同一で、目的関数ベクトルがわずかに異なるだけ. Dの最適解は(多分)D'でも最適解.

$\mathbf{y}^*$: Dの最適解

$$(P' \text{の最適値}) = (D' \text{の最適値}) \cong \mathbf{y}^{*\top} (\mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{e}^i)$$

$$= \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{e}^i = (D \text{の最適値}) + \varepsilon y_i^*$$

$$= (P \text{の最適値}) + \varepsilon y_i^*$$

第*i*資源を ε 増やすと収益は εy_i^* 増加

潜在価格 (shadow price)

第 i 資源を ε 増やすと収益は εy_i^* 増加

「第 i 資源の市場価格 $< y_i^*$ 」 $\Rightarrow$ 第 i 資源を買い足す

第 i 資源を ε 減らすと収益は εy_i^* 減少

「第 i 資源の市場価格 $> y_i^*$ 」 $\Rightarrow$ 第 i 資源を市場で売る

双対問題の最適解の第 i 要素 y_i^*

y_i^* : (右辺項ベクトル第 i 要素の)

潜在価格 (shadow price) と呼ばれる.

感度分析

材料の量ベクトルが $\mathbf{b}^\top = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ から,

微小に $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ 変動した.

$$D: \min\{\mathbf{y}^\top \mathbf{b} \mid \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{w}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

$$D': \min\{\mathbf{y}^\top (\mathbf{b} + \Delta) \mid \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{w}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

D'の最適値は、Dの最適値からどのくらい変わるの？

$\mathbf{y}^*$: 双対問題Dの最適解

変動後の問題D'でも、 $\mathbf{y}^*$ は最適解のまま(と予想される)

$$\begin{aligned} (D' \text{の最適値}) &\simeq \mathbf{y}^{*\top} (\mathbf{b} + \Delta) = \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b} + \mathbf{y}^{*\top} \Delta \\ &= (D \text{の最適値}) + \mathbf{y}^{*\top} \Delta \end{aligned}$$

今日は省略

生産計画ゲームのコア

生産計画問題を思い出そう！

資源の集合(ぶどう): $M = \{1, 2, \dots, m\}$

製品の集合(ワイン): $P = \{1, 2, \dots, p\}$

a_{ij} : 製品 j を1単位製造するには、資源 i が

$a_{ij} (\geq 0)$ 単位必要である

w_j : 製品 j を1単位売って得られる利益が w_j (\$)

資源量ベクトル $\mathbf{b}^\top = (b_1, b_2, \dots, b_m) \geq \mathbf{0}$

この会社は利益を最大にする、製品の生産量を知りたい

$\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \dots, x_p)$: 各製品の生産量変数(非負)

最大利益 = $\max\{\mathbf{w}^\top \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

生産計画ゲーム(特性関数ゲーム)

$N = \{1, 2, \dots, n\}$: プレイヤー集合

$$\mathbf{b}(i)^{\top} = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_m^i) \geq \mathbf{0}:$$

プレイヤー i が持っている資源の量ベクトル

総利益: 全プレイヤーの持つ資源を使って得られる利益の最大値

$$v(N) = \max\{\mathbf{w}^{\top} \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \sum_{i \in N} \mathbf{b}(i), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

総利益 $v(N)$ を、プレイヤー間で分配する

利得ベクトル $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ をどう決めれば良いのか？

生産計画ゲーム(特性関数ゲーム)

$N = \{1, 2, \dots, n\}$: プレイヤー集合

提携 S : プレイヤーの部分集合 ($S \subseteq N$)

$v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ 特性関数

$v(S)$: 提携 S 中のプレイヤーが協力した場合の利益

$$v(\textcolor{red}{S}) = \max\{\mathbf{w}^\top \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \sum_{i \in \textcolor{red}{S}} \mathbf{b}(i), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \quad (v(\emptyset) = 0 \text{ と定義})$$

(N, v) : 生産計画ゲーム(特性関数ゲーム)

定理 (Owen 1975)

任意の生産計画ゲームは、非空のコアを持つ。

すなわち下記を満たす利得ベクトル $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ が存在

(1) 全体合理性: $z_1 + z_2 + \dots + z_n = v(N)$

(2) 提携合理性: $\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} z_i \geq v(S)$

証明 (1/2)

$$v(N) = \max\{\mathbf{w}^\top \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq (\sum_{i \in N} \mathbf{b}(i)), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

双対問題:

$$D: \min\{\mathbf{y}^\top (\sum_{i \in N} \mathbf{b}(i)) \mid \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{w}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

$\mathbf{y}^*$: Dの最適解(の一つ)

$(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_i = \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b}(i) \quad (\forall i)$ と定義

全体合理性: $z_1 + z_2 + \dots + z_n = v(N)$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

$$= \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b}(1) + \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b}(2) + \dots + \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b}(n)$$

$$= \mathbf{y}^{*\top} (\sum_{i \in N} \mathbf{b}(i)) = D\text{の最適値} = v(N)$$

証明 (2/2)

提携合理性: $\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} z_i \geq v(S)$

$$v(S) = \max\{\mathbf{w}^\top \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \sum_{i \in S} \mathbf{b}(i), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

双対問題:

$$D(S): \min\{\mathbf{y}^\top (\sum_{i \in S} \mathbf{b}(i)) \mid \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{w}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

$\mathbf{y}^*$: 下記Dの最適解

$$D: \min\{\mathbf{y}^\top (\sum_{i \in N} \mathbf{b}(i)) \mid \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{w}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

制約が同じ！

$\mathbf{y}^*$ は $D(S)$ の許容解でもある.

$$\begin{aligned} \text{ゆえに, } \sum_{i \in S} z_i &= \sum_{i \in S} \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b}(i) = \mathbf{y}^{*\top} (\sum_{i \in S} \mathbf{b}(i)) \\ &\geq D(S) \text{の最適値 (最小値)} = v(S). \end{aligned}$$

$D(S)$ は最小化問題だから

制約式の追加

制約式の追加

制約式の追加

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0.$$

上記の問題を解いたあと,

新たに $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = d$ という制約を追加した問題

$$P': \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = d, \mathbf{x} \geq 0.$$

を解くことになった！

制約が追加されているので,

P の許容領域 $\supseteq P'$ の許容領域

P の最適値 $\geq P'$ の最適値

が成り立つ.

制約式の追加

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0.$$

$$P': \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = d, \mathbf{x} \geq 0.$$

$\mathbf{x}^*$: P の最適解.

(1) $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}^* = d$ が成り立つなら, $\mathbf{x}^*$ は P' の最適解.

$\because \mathbf{a}^\top \mathbf{x}^* = d$ より, $\mathbf{x}^*$ は P' の許容解.

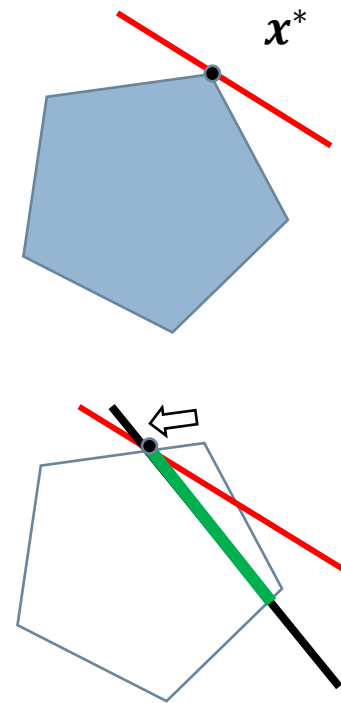
P' の最適値 $\geq \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = P$ の最適値 $\geq P'$ の最適値

(2) $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}^* = d$ が成り立たない.

$\mathbf{x}^*$ は, 多分 P' の最適解に近い!

$\mathbf{x}^*$ を初期解として単体法を実行すると良さそう!

$\mathbf{x}^*$ は P' の許容解でない.... 初期解にできない!



制約式の追加

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t.} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0.$$

$$D: \min. \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{c}^\top.$$

$$P': \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s. t.} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = d, \mathbf{x} \geq 0.$$

$$D': \min. \mathbf{y}^\top \mathbf{b} + dz \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{y}^\top A + z\mathbf{a}^\top \geq \mathbf{c}^\top.$$

$\mathbf{x}^*$: Pの最適解. $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}^* \neq d \rightarrow P'$ の許容解でない
初期解にできない!

$\mathbf{y}^*$: Dの最適解.

$(\mathbf{y}, z) = (\mathbf{y}^*, 0)$ はD'の許容解.

$(\mathbf{y}^*, 0)$ を初期解としてD'を単体法で解く!

考慮すべき問題

$(\mathbf{y}^*, 0)$ は初期許容基底解ですか?

D'の最適解からP'の最適解を得るには?

実際には、**双対単体法**と呼ばれる方法を利用すると、計算時間が短くなる傾向がある.

2時間目はここまで！

休憩しましょう

『彼女について私が知っている二、三の事柄』

西村昭五郎監督の『団地妻 昼下りの情事』（昭和46年）
に深い影響を与えた。



緩和法と双対

緩和法

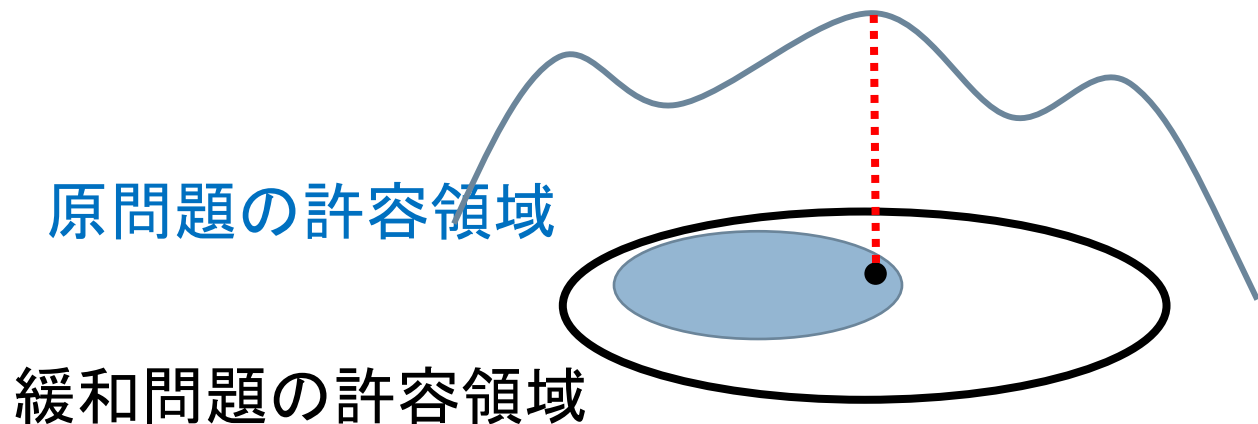
問題の制約を緩和し，解き易い問題に変換する手法

緩和問題(relaxation problem): 緩和して得られた問題
最大化問題ならば，原問題の最適値の上界が得られる

単純な緩和: 制約の一部を取り除く！

- (1) その制約を取り除くと，容易に解ける問題となる
- (2) 得られる緩和問題は原問題に似ている

『制約を取り除いて得られる緩和問題』を解いて得られた解 x が，原問題の許容解だったら， x は原問題の最適解！



ラグランジュ緩和 (Lagrange relaxation) (Lagrangian relaxation)

単に「罰金法 (penalty method)」と呼ばれることもある

Lagrange 緩和(不等式制約)

$$P: \max. f(x) \quad \text{s. t.} \quad h_j(x) \leq d_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

不等式制約 $h_j(x) \leq d_j$ を取り除き, 適当な**非負**数値 λ_j 倍して,
目的関数に繰り込む

ラグランジュ緩和問題

制約を満たしていないと
負の値 → 罰金項

$$L(\lambda): \max. f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (d_j - h_j(x))$$

s. t. ———

ベクトル $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ を固定すると, 問題 $L(\lambda)$ が定まる.
 λ : **Lagrange 乗数(ベクトル)**

$L(\lambda)$ の性質 + どんな λ を選べばよいか?

Lagrange 緩和(不等式制約)

$$P: \max. f(\mathbf{x}) \quad \text{s. t.} \quad h_j(\mathbf{x}) \leq d_j \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$L(\lambda): \max. f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (d_j - h_j(\mathbf{x}))$$

$$\text{s. t.} \quad \text{-----}$$

Pの最適値（最大値）
の上界が得られる。
運が良ければPが解ける

性質: $\forall \lambda \geq 0$, Pの最適値 $\leq L(\lambda)$ の最適値

証明: $\mathbf{x}^*$: Pの最適解

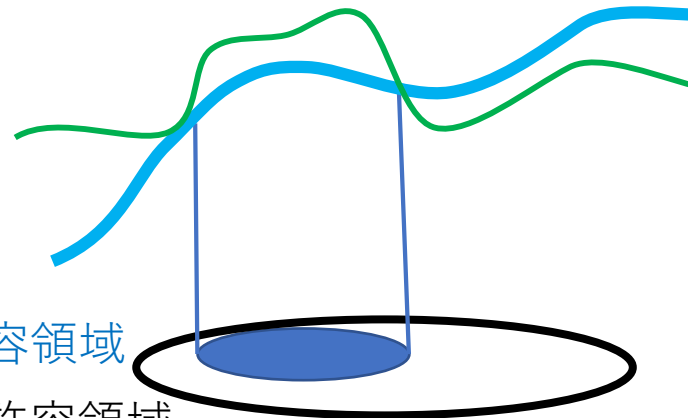
$$P\text{の最適値} = f(\mathbf{x}^*)$$

$$\leq f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^l \lambda_j (d_j - h_j(\mathbf{x}^*))$$

$$\leq L(\lambda)\text{の最適値}$$

$$\geq 0 \quad \geq 0$$

$\therefore \mathbf{x}^*$ は $L(\lambda)$ の許容解



原問題の許容領域

緩和問題の許容領域

Lagrange 双対問題

$$P: \max\{f(x) \mid h_j(x) \leq d_j \ (j = 1, 2, \dots, m),\}$$

Lagrange 乗数: $\lambda \geq 0$

$$L(\lambda): \max\{f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (d_j - h_j(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

最も良いLagrange 乗数の値を求める

Lagrange 双対問題

$$\min_{\lambda \geq 0} \left\{ \max\{f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (d_j - h_j(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \right\}$$

最強Lagrange乗数:

Lagrange 双対問題の最適解 λ

線形計画の場合

$$P: \max\{f(x) | h_j(x) \leq d_j \ (j = 1, 2, \dots, m),\}$$

$$P: \max\{c^T x | Ax \leq b\}$$

Lagrange 双対問題

$$\min_{\lambda \geq 0} \left\{ \max_x \{c^T x + \lambda^T (b - Ax) | x \in \mathbb{R}^n\} \right\}$$

$L(\lambda): \max_x \{c^T x + \lambda^T (b - Ax) | x \in \mathbb{R}^n\}$ は、 x の制約が無い問題。

$c^T x + \lambda^T (b - Ax) = (c^T - \lambda^T A)x + \lambda^T b$ (線形関数) より、
(有限の) 最大値を持つのは、 $(c^T - \lambda^T A) = 0^T$ のときであり、そのときの最適値は $\lambda^T b$ となる。

→ Lagrange 双対問題 (最強Lagrange乗数を求める問題) は

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \lambda^T b \\ &\text{subject to} && \lambda^T A = c^T, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

双対問題そのもの

→ LPの双対問題は、ラグランジュ双対問題の特殊ケース

制約を1本だけ、ラグランジュ緩和してみる

前ページの例：
制約すべてを
緩和してみた。

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b'.$$

不等式制約の内、1本 ($\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b'$) だけをラグランジュ緩和

ラグランジュ緩和問題:

$$\begin{aligned} L(\lambda): \max_{\mathbf{x}} \{ & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \\ & = \max_{\mathbf{x}} \{ (\mathbf{c} - \lambda \mathbf{a})^\top \mathbf{x} + \lambda b' \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \end{aligned}$$

領域 $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$: 有界多面体とする.

領域の端点集合 $\Omega = \{ \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^q \}$

$L(\lambda)$ は LP $\rightarrow$ 端点 $\Omega = \{ \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^q \}$ 中に $L(\lambda)$ の最適解あり

ラグランジュ緩和問題 $L(\lambda)$ の最適値の関数 $f(\lambda)$ は?

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \max_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \\ &= \max_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega \} \\ &= \max \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^i + \lambda(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^i) \mid i = 1, \dots, q \} \end{aligned}$$

制約を1本だけ、ラグランジュ緩和してみる

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b'.$$

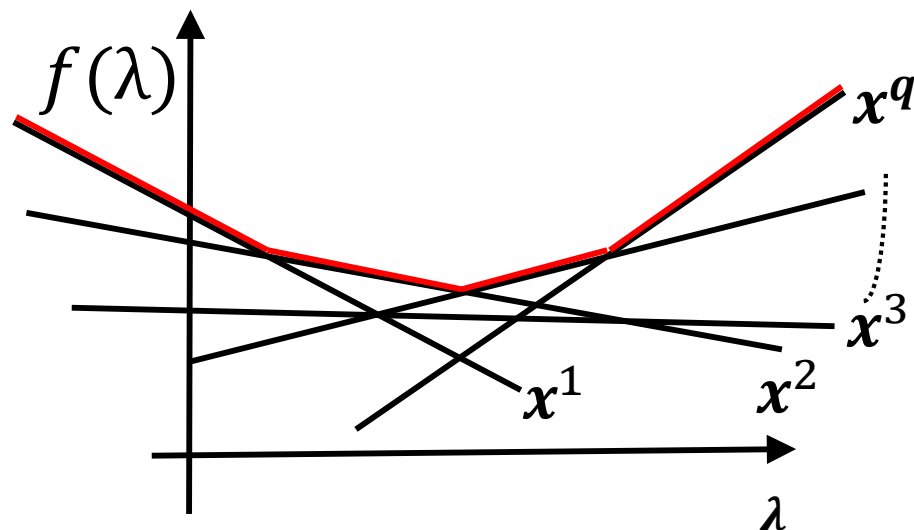
領域 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$: 有界多面体とする.

$$\text{端点集合: } \Omega = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^q\}$$

ラグランジュ緩和問題 $L(\lambda)$ の最適値 $f(\lambda)$ は？

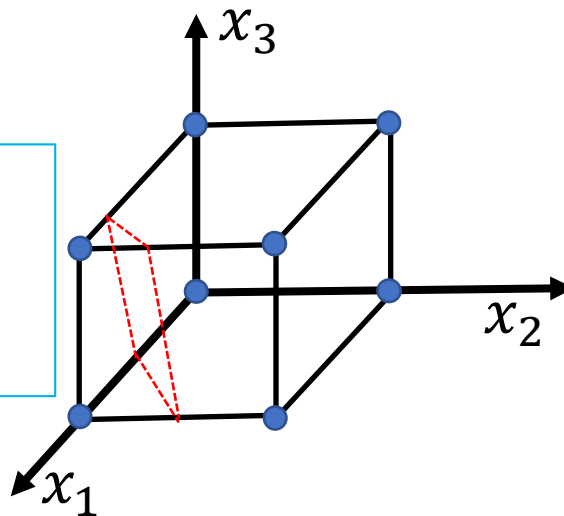
$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \max_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \\ &= \max \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^i + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}^i) \mid i = 1, \dots, q \} \end{aligned}$$

$f(\lambda)$ は, $|\Omega| = q$ 個の
線形関数(変数は λ) の
最大値をとったもの
(上側包絡面)
区分線形凸関数である



数值例

$$\begin{aligned} \max. & 4x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} & -10x_1 + 8x_2 + x_3 \leq -6, \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1. \end{aligned}$$



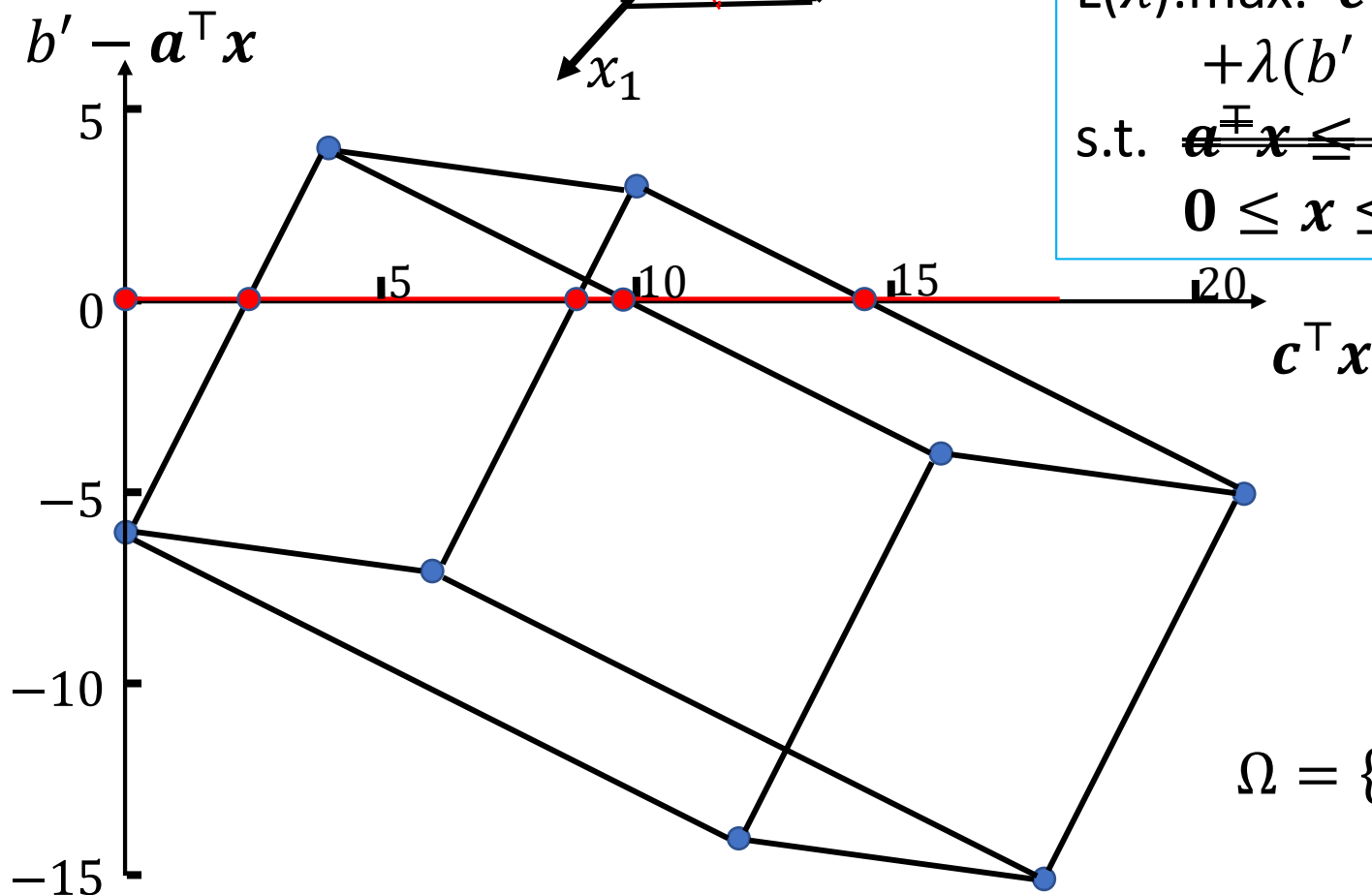
$$\begin{aligned} \text{P:} \max. & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b', \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

数值例

$$\begin{aligned} \max. \quad & 4x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -10x_1 + 8x_2 + x_3 \leq -6, \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P: \max. \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b', \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\lambda): \max. \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b, \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

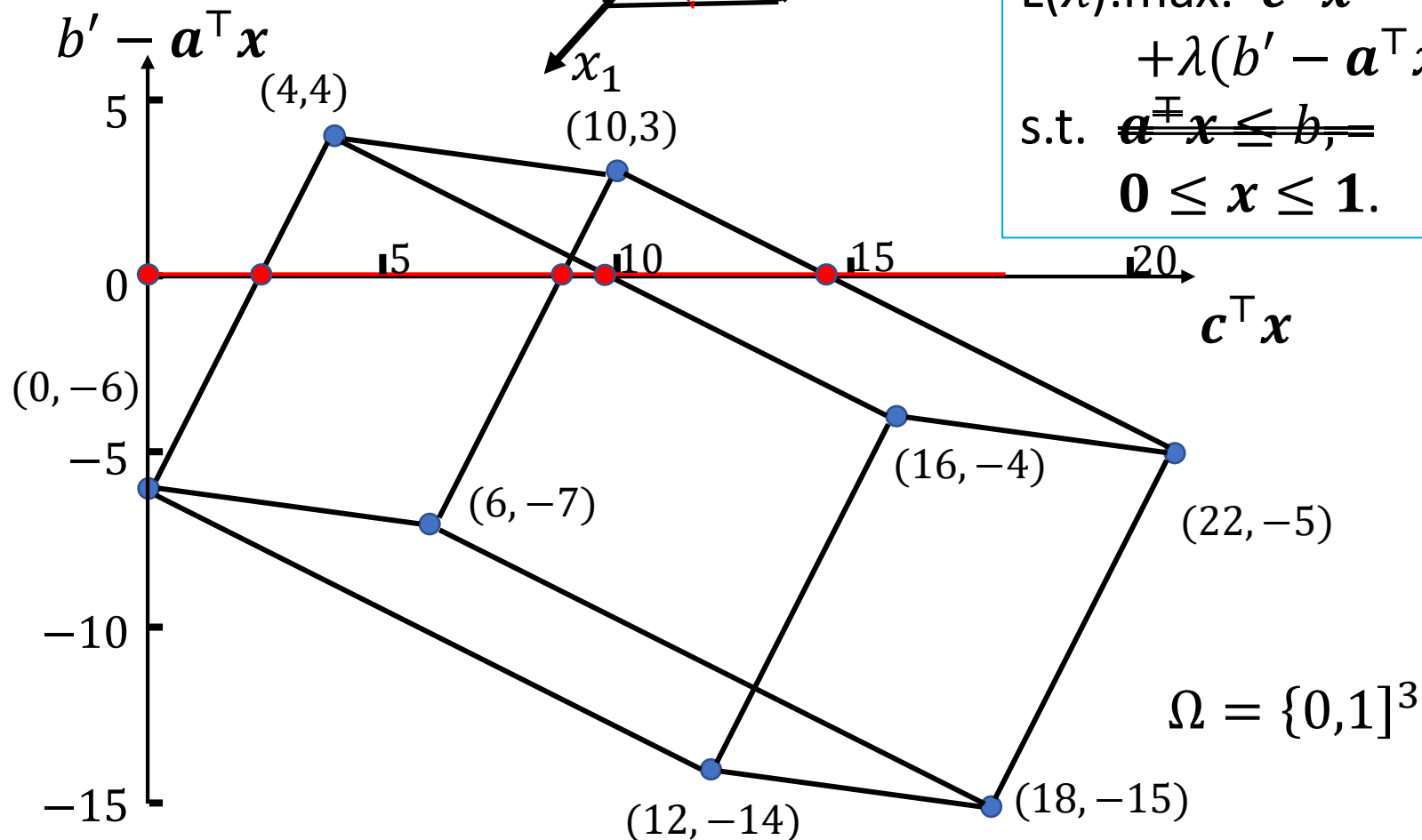


数值例

$$\begin{aligned} \max. & 4x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} & -10x_1 + 8x_2 + x_3 \leq -6, \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P: \max. & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b', \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\lambda): \max. & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b', \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

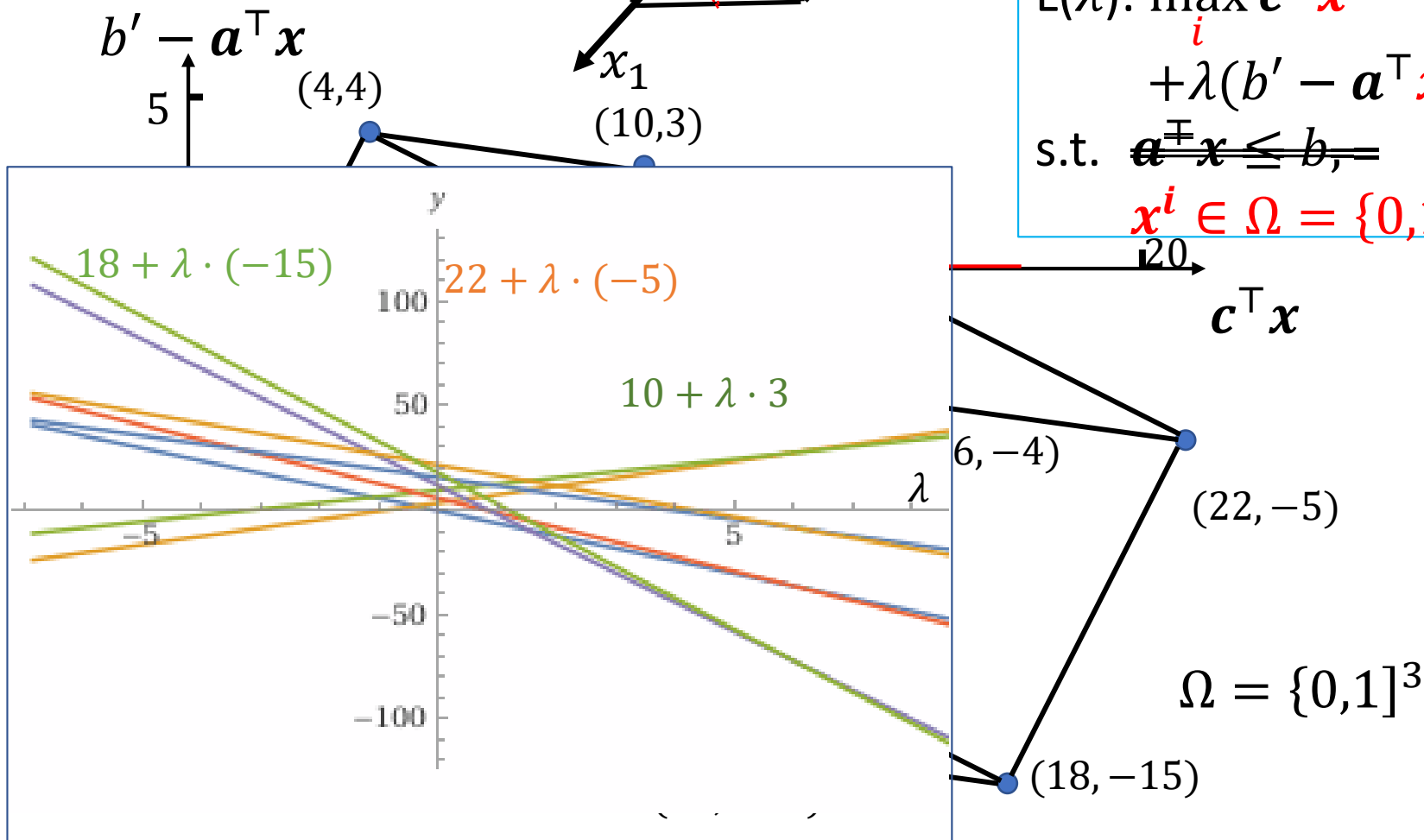


数值例

$$\begin{aligned} \max. \quad & 4x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -10x_1 + 8x_2 + x_3 \leq -6, \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1. \end{aligned}$$

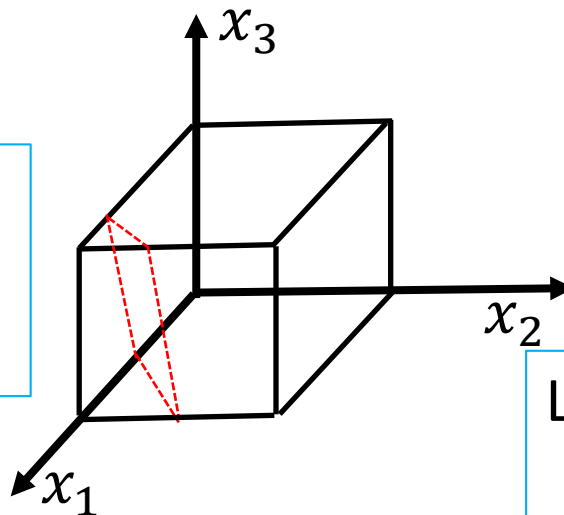
$$\begin{aligned} P: \max. \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & a^T x \leq b', \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\lambda): \max \quad & c^T x^i \\ & + \lambda(b' - a^T x^i) \\ \text{s.t.} \quad & \cancel{a^T x \leq b'} \\ & x^i \in \Omega = \{0,1\}^3. \end{aligned}$$



数值例

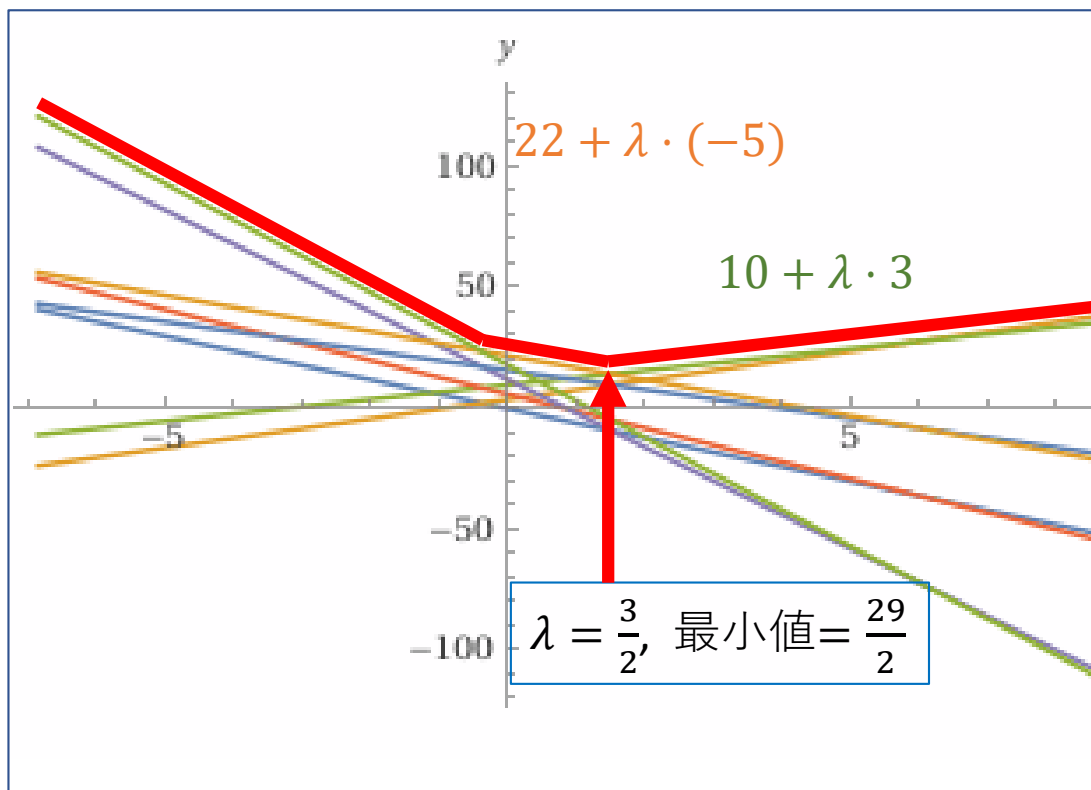
$$\begin{aligned} \max. \quad & 4x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -10x_1 + 8x_2 + x_3 \leq -6, \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P: \max. \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b', \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

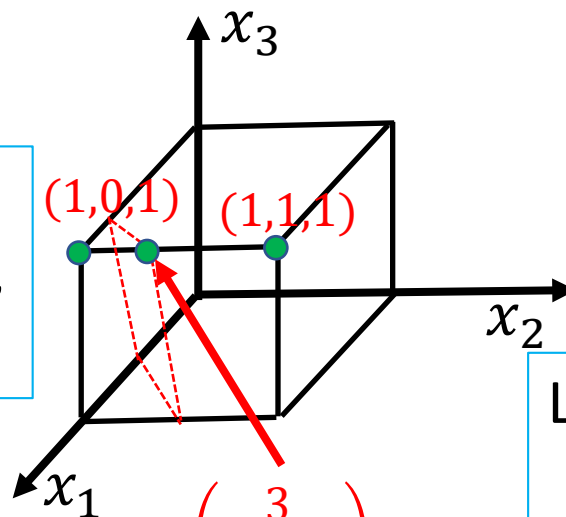
$$\begin{aligned} L(\lambda): \max. \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^\mp \mathbf{x} \leq b, \\ & \Omega = \{0,1\}^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \max_x \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \lambda(b' - \mathbf{a}^\top \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}^\mp \mathbf{x} \leq b, \\ & \Omega = \{0,1\}^3. \end{aligned}$$



数值例

$$\begin{aligned} \max. \quad & 4x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -10x_1 + 8x_2 + x_3 \leq -6, \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1. \end{aligned}$$

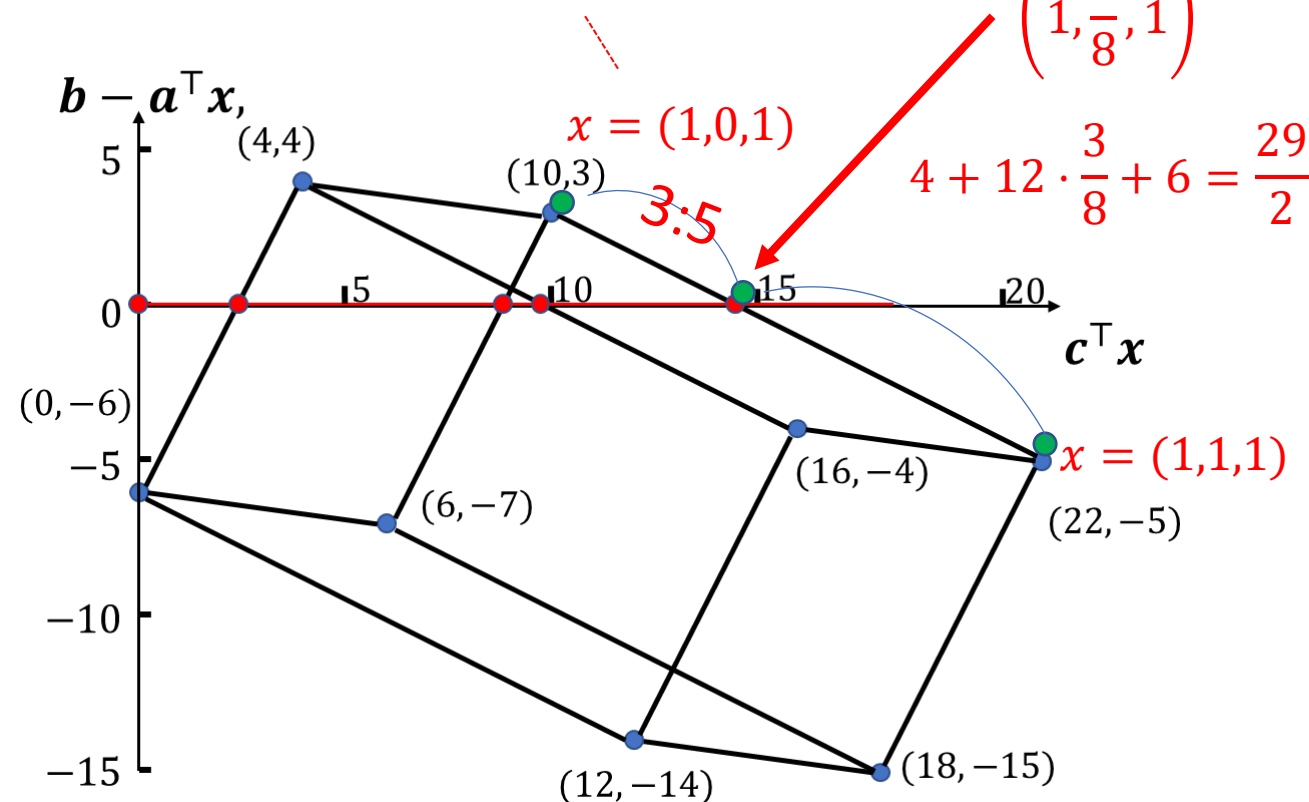


$$\begin{aligned} P: \max. \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & a^T x \leq b', \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\lambda): \max. \quad & c^T x \\ & + \lambda(b' - a^T x) \\ \text{s.t.} \quad & \cancel{a^T x \leq b}, \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \max_x \quad & c^T x + \lambda(b' - a^T x) \\ \text{s.t.} \quad & \cancel{a^T x \leq b}, \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{3}{2}, \text{ 最小值} = \frac{29}{2}$$



費用分割法 (cost splitting method)

多くの場合、費用最小化問題で説明されるので、
「費用分割法」と呼ばれる。

本資料は、最大化問題で説明している。

費用分割緩和

$$P: \max. f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad h_j(\mathbf{x}) \leq d_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

目的関数を m 個の関数の和に分解

$$f(\mathbf{x}) = f^{(1)}(\mathbf{x}) + f^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots + f^{(m)}(\mathbf{x})$$

変数 $\mathbf{x}$ のコピーを作る

$$\begin{aligned} P: \quad & \max. f^{(1)}(\mathbf{x}^1) + f^{(2)}(\mathbf{x}^2) + \dots + f^{(m)}(\mathbf{x}^m) \\ & \text{s.t.} \quad h_j(\mathbf{x}^j) \leq d_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ & \quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \dots = \mathbf{x}^m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CSP:} \quad & \max. f^{(1)}(\mathbf{x}^1) + f^{(2)}(\mathbf{x}^2) + \dots + f^{(m)}(\mathbf{x}^m) \\ & \text{s.t.} \quad h_j(\mathbf{x}^j) \leq d_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

~~$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \dots = \mathbf{x}^m$$~~

m 個に分解

制約を取り除く
という
単純な緩和

$$\text{CSP}(j): \max. f^{(j)}(\mathbf{x}^j) \quad \text{s.t.} \quad h_j(\mathbf{x}^j) \leq d_j$$

得られる上界を小さくするには、どんな分解が良いのか？

線形計画の場合

$$P: \max\{f(\mathbf{x}) \mid h_j(\mathbf{x}) \leq d_j \ (j = 1, 2, \dots, m),\}$$

$$P: \max\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

 $A =$

$\mathbf{a}_1^\top$
$\mathbf{a}_2^\top$
$\vdots$
$\mathbf{a}_m^\top$

目的関数ベクトルを $\mathbf{c} = \mathbf{c}^1 + \mathbf{c}^2 + \dots + \mathbf{c}^m$ と分解

$$\text{CSP}(j): \max. \mathbf{c}^j{}^\top \mathbf{x}^j \text{ s.t. } \mathbf{a}_j{}^\top \mathbf{x}^j \leq b_j$$

(有限の)最大値を持つのは、

$[\exists \lambda_j \geq 0, \mathbf{c}^j = \lambda_j \mathbf{a}_j]$ が成り立つとき。

そのときの最適値は $\lambda_j b_j$ となる。

→ 最も良い(得られる上界が小さい)分解を求める問題は

$$\text{minimize } \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j = \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$

$$\text{subject to } \mathbf{c}^j = \lambda_j \mathbf{a}_j \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{c}^j = \mathbf{c}, \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

$$\text{minimize } \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$

$$\text{subject to } \boldsymbol{\lambda}^\top A = \mathbf{c}^\top, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}.$$

双対問題そのもの

松井はこれが好き
だって自由だから

相補スラック定理

誰が最初に証明したかは不明

強双対定理の出現と一緒に認識されていたらしい

相補スラック定理(1)

主問題: maximize $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$
 subject to $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

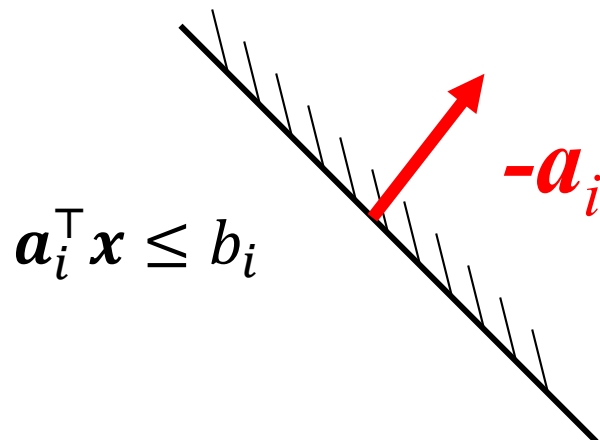
max. $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$
 s. t. $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i \quad (i \in \{1, 2, \dots, m\}),$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{a}_1^\top \\ \hline \mathbf{a}_2^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_m^\top \\ \hline \end{array}$$

双対問題: minimize $\mathbf{y}^\top \mathbf{b}$
 subject to $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

min. $\sum_{i=1}^m y_i b_i$
 s. t. $\sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i^\top = \mathbf{c}^\top,$
 $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$

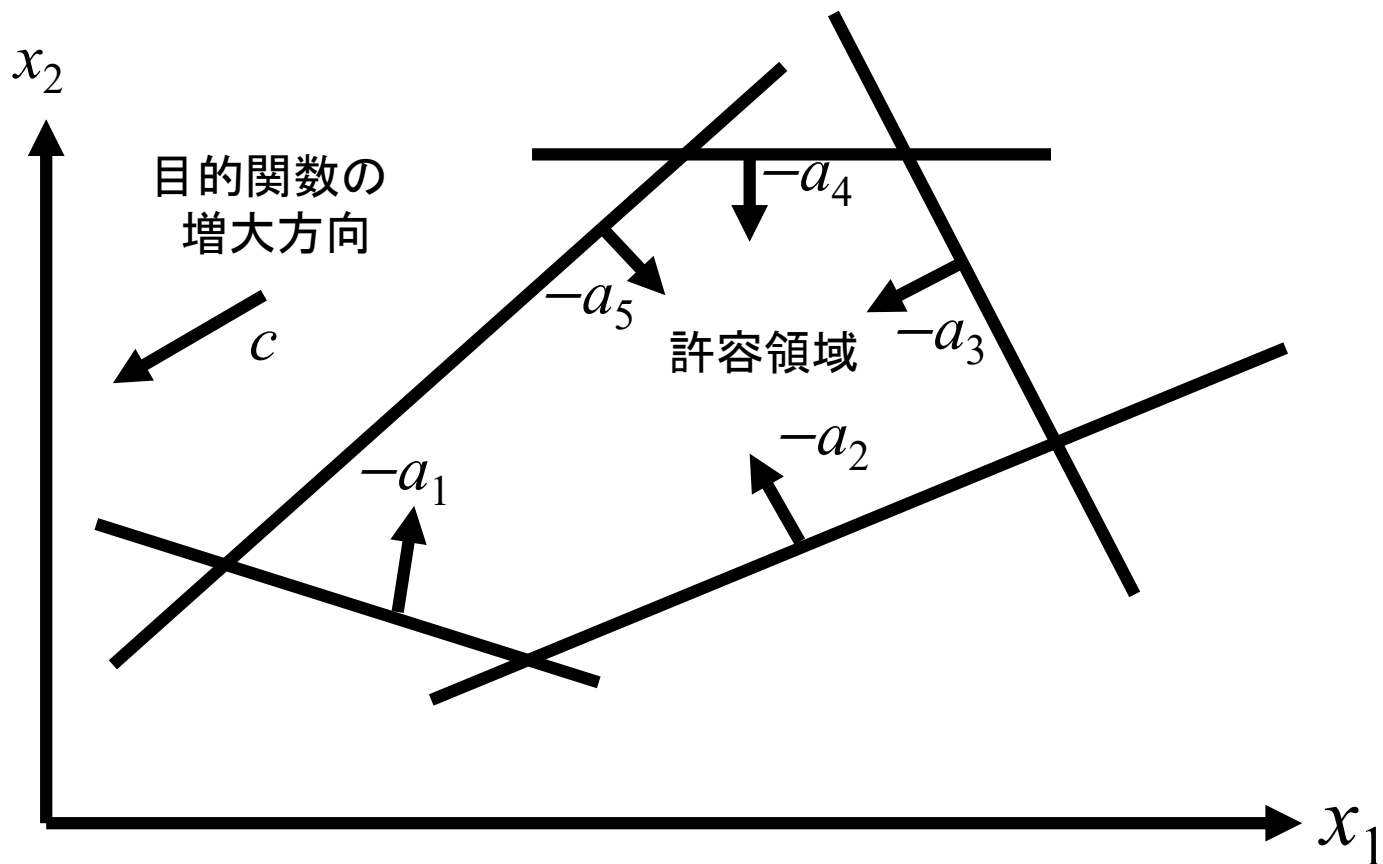
主問題の変数が2つ際の,
 力学的な解釈



相補スラック定理(2)

主問題: $\max. c^T x$

s. t. $a_i^T x \leq b_i \ (i \in \{1, 2, \dots, m\}),$

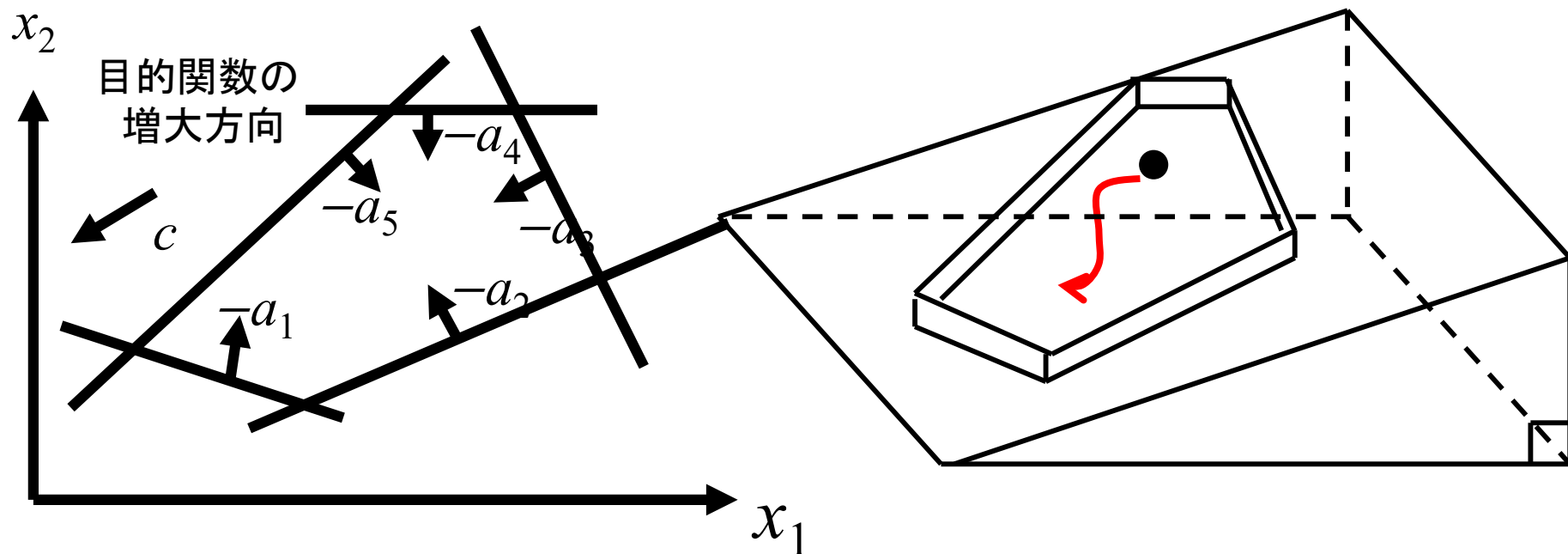


相補スラック定理(3)

制約式の場所に壁をつくる.

目的関数の増大方向に傾ける.

最大点で玉は静止する(つりあう)



相補スラック定理(4)

力のつりあいの式:

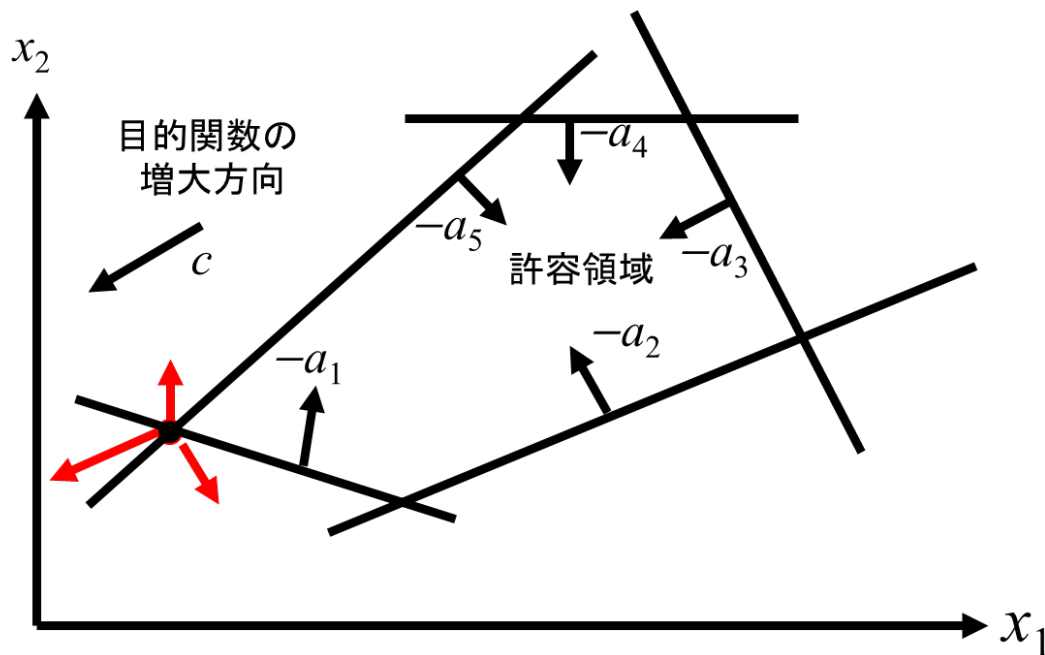
壁 $a_i^\top x \leq b_i$ の押す力(抗力ベクトル)を $y_i(-a_i^\top)$ とする

つりあいの式: $c^\top + \sum_{i=1}^m y_i (-a_i^\top) = 0$,

壁は押すだけ: $y \geq 0$.

双対問題:

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{i=1}^m y_i b_i \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^m y_i a_i^\top = c^\top, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$



相補スラック定理(5)

壁 $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i$ の押す力(抗力ベクトル)を $y_i \mathbf{a}_i^\top$ とする

つりあいの式: $\sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i^\top = \mathbf{c}^\top$,

壁は押すだけ: $y \geq 0$.

押している壁は玉に接する: $y_i > 0 \Rightarrow \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i$

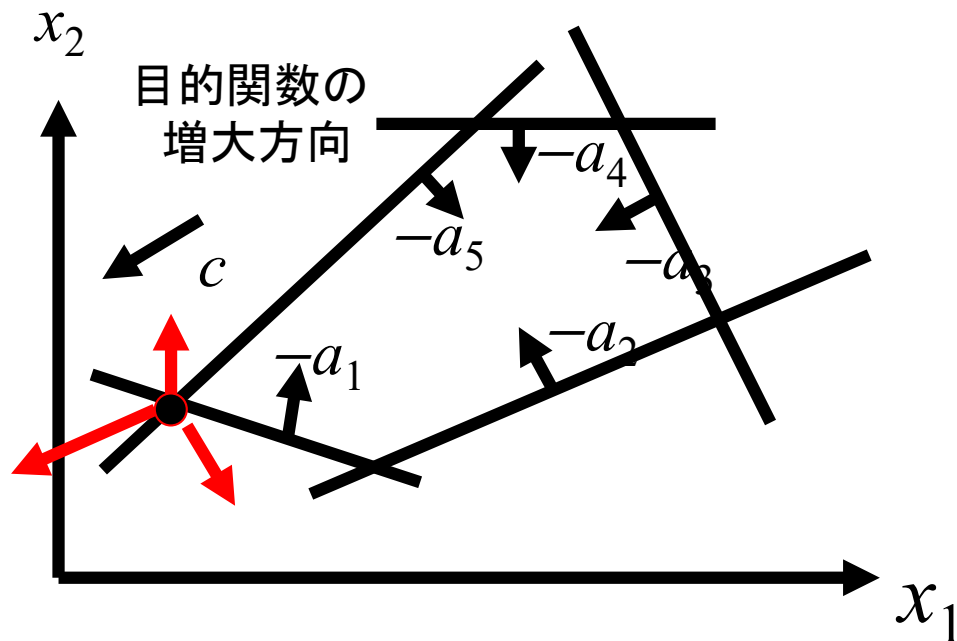
玉から離れた壁は押していない: $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} < b_i \Rightarrow y_i = 0$

双対問題:

$$\min. \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i^\top = \mathbf{c}^\top,$$

$$\mathbf{y} \geq 0.$$



相補スラック定理(6)

壁 $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i$ の押す力(抗力ベクトル)を $y_i \mathbf{a}_i^\top$ とする

つりあいの式: $\sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i^\top = \mathbf{c}^\top$,

壁は押すだけ: $y \geq 0$.

押している壁は玉に接する: $y_i > 0 \Rightarrow \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i$

玉から離れた壁は押していない: $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} < b_i \Rightarrow y_i = 0$

$$\sum_{i=1}^m y_i (b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

最適解では, 両方の目的関数が一致する.

$\Rightarrow$ 強双対定理

相補スラック定理

相補スラック定理

$$P: \max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

$$\text{s. t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i \quad (i \in \{1, 2, \dots, m\}),$$

$$D: \min. \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i^\top = \mathbf{c}^\top,$$

$$\mathbf{y} \geq 0.$$

$\mathbf{x}, y_i$ をPとDの許容解とすると,以下は同値.

(1) $\mathbf{x}, y_i$ は, それぞれPとDの最適解.

$$(2) \quad \lceil \forall i, \quad y_i > 0 \rightarrow \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i \rceil \text{ ----} (*)$$

$$\text{かつ } \lceil \forall i, \quad \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} < b_i \rightarrow y_i = 0 \rceil \text{ ----} (**)$$

注: $\mathbf{x}, y_i$ がPとDの許容解ならば、(*)(**)の内的一方を満たせば
他方も自動的に満たされる

(強双対定理と等価な定理)

$$y_i(b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}) = 0 \quad (\forall i) \text{ と書いてもOK}$$

証明((1)強双対定理) $\Leftrightarrow$ (2)相補性条件)

(1) $\mathbf{x}, (\mathbf{y}_i)$ はP, Dの最適解 $\Rightarrow$ (2)

$$P\text{の最適値} = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i^\top \right) \mathbf{x}$$

$$= \sum_{i=1}^m y_i (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i = D\text{の最適値}$$

強双対定理より $\sum_{i=1}^m y_i (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m y_i b_i$

$$0 = \sum_{i=1}^m y_i b_i - \sum_{i=1}^m y_i (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x})$$

$$0 = \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x})$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i (\forall i)$$

$\forall i, y_i (b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}) = 0$ が成り立つ.

(2) (a) $y_i > 0 \Rightarrow \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i$ (b) $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} < b_i \Rightarrow y_i = 0$

(2) $\Rightarrow$ (1)は上記を逆に辿る.

生産計画問題での相補スラック定理

P: $\max. \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ s. t. $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m$: 所持している資源量ベクトル, $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$: 収益

D: $\min. \mathbf{y}^\top \mathbf{b}$ s. t. $\mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{c}^\top$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

相補性条件

$$y_i > 0 \rightarrow \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i$$

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} < b_i \rightarrow y_i = 0$$

感度分析

Dの最適解において $y_i > 0$

= (原材料*i*の量が(ε)増えると収益は εy_i 増加する)

$\Rightarrow \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i$ (最適解で原材料*i*が余っていない)

Pの最適解において主問題Pの*i*番目の制約が $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} < b_i$

(最適解で原材料*i*が余っている)

$\Rightarrow y_i = 0$ = (原材料*i*が(ε)増えても収益は増加しない)

Pに変数*x*の非負条件があるため、
変数*x*に関する相補条件もあるが、
ここでは詳細は割愛する

KKT条件と相補スラック定理

$$\begin{aligned} \min. \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

ラグランジュ関数 ($\lambda \geq \mathbf{0}$)

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

$$P: \max. \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} \min. \quad & -\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i \leq 0 \quad (\forall i) \end{aligned}$$

ラグランジュ関数 ($\lambda \geq \mathbf{0}$)

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = -\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i)$$

KKT条件

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \lambda_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \lambda_i g_i(\mathbf{x}) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

KKT条件

$$\begin{aligned} -\mathbf{c} + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{a}_i) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i &\leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \lambda_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \lambda_i (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^\top A &= \mathbf{c}^\top, \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b}, \\ \lambda &\geq \mathbf{0}, \\ \text{相補性条件} \end{aligned}$$

相補スラック定理は、KKT条件の特殊ケース？

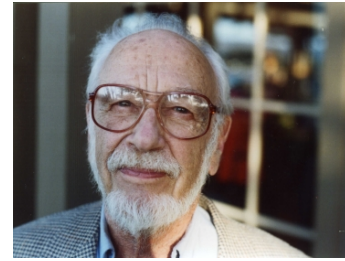
KKT条件が、相補スラック定理の拡張

$$\begin{aligned} D: \min. \quad & \lambda^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \lambda^\top A = \mathbf{c}^\top, \quad \lambda \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

その頃Gale は？ [Kjeldsen (2000) p. 344]

双対定理(1949): Gale-Kuhn-Tucker (発表)

(K)KT条件(1950): (Karush)-Kuhn-Tucker



Gale

1949年の秋、Gale, Kuhn, Tuckerが線形計画法の研究を発表した直後、Tuckerはスタンフォードに休暇に出かけた。Tuckerは、KuhnとGaleに手紙を書き、この研究を続け、線形計画法の双対性の結果を二次計画法に拡張しようと誘った。Galeはこの申し出を断ったが、Kuhnはこれを受け入れ、スタンフォード大学とプリンストン大学の間で文通をしながら、Tuckerとともに理論を発展させた。

Gale 年表

1949年 プリンストン大学で数学のPh.D.を取得する(博士論文 'Solutions of Finite Two-Person Games')。

1949年 - 1950年 プリンストン大学で数学の専任講師となる。

KT条件がKKT条件になった頃

- KT条件(1950): Kuhn-Tucker
- W. Karush が修士論文(1939)で同じ事を示していたことが、後に判明する。
- Fritz John (1948)が非常によく似た結果を示していたことが判明する。
- SIAM-AMS symposium, New York City, 1976 において Kuhnは、W. Karushと F. John の結果について報告し、KKT条件と呼ぶことを呼びかける。

Kuhn, H. W. (1976). Nonlinear programming: a historical view, SIAM-AMS Proceedings, vol. IX, AMS, Providence, RI.

Tuckerのリアクション[Kjeldsen (2000) p. 337]

Kuhn also writes about Tucker's reaction when he learned of the result in Karush's thesis.

Tucker was truly amazed that Karush had never told him about his work when they met at the RAND Corporation.

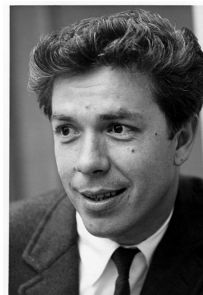
クーンはまた、カルーシュの論文の結果を知ったときのタッカーの反応についても書いている。

タッカーは、ランド研究所で会ったとき、カルーシュが自分の研究のことを決して話さなかったことに本当に驚いていた。

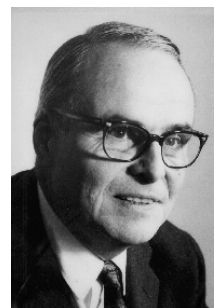
Kjeldsen, T. H. (2000). A contextualized historical analysis of the Kuhn–Tucker theorem in nonlinear programming: the impact of World War II. *Historia Mathematica*, 27(4), 331-361.



Karush



Kuhn



Tucker

Karushは何故？[Kjeldsen (2000) p. 338]

KarushからKuhnへの返信の手紙



Karush

--- 後年、非線形計画法が定着し、隆盛を極めたとき、なぜ私は自分の仕事を指摘しなかったのかという疑問の答えにはなっていません。ただ、初期の研究については、どちらかというと自信がなかったし、“認められたい”という強い欲求があったわけでもありません。いずれにせよ、この修士論文は数年前まで埋もれていたのですが、Hestenesが「歴史の中にふさわしい場所があるはずだから、もう一度見てみたらどうか」と促してきました……。そこで私は修士論文を読み直し、貴君とTuckerの共同作業も見直しました。結果として、貴方達はこのテーマを 私よりはるかに発展させていて、「私が最初にやったことを見ろ」と世間に公表する正当性は私には無いという結論に至ったのです。

	(没年－生年) なので不正確			戦前	WWII:1939-1945						
	生年	没年	享年?	Karush	vN&M 1 st	D & vN	GKT Duality	KT	Bondareva	Shapley	KKT
	1736	1813	77	1939	1944	1947	1949	1950	1963	1967	1976
Lagrange	1736	1813	77				1962	松井誕			
Farkas	1847	1930	83							松井中2	
Fredholm	1866	1927	62								
von Neumann	1903	1957	54	36	41	44	46	47	---	---	---
Tucker	1905	1995	90	34	39	42	44	45	58	62	71
Dantzig	1914	2005	91	25	D30	33	35	36	49	53	62
Karush	1917	1997	80	M 22	27	30	32	33	46	50	59
Gale	1921	2008	87	18	23	26	D 28	29	42	46	55
Shapley	1923	2016	92	16	21	24	<u>26</u>	27	40	44	53
Kuhn	1925	2014	89	14	19	22	24	D 25	38	42	51
Bondareva	1937	1991	54	2	7	10	12	13	26	30	39

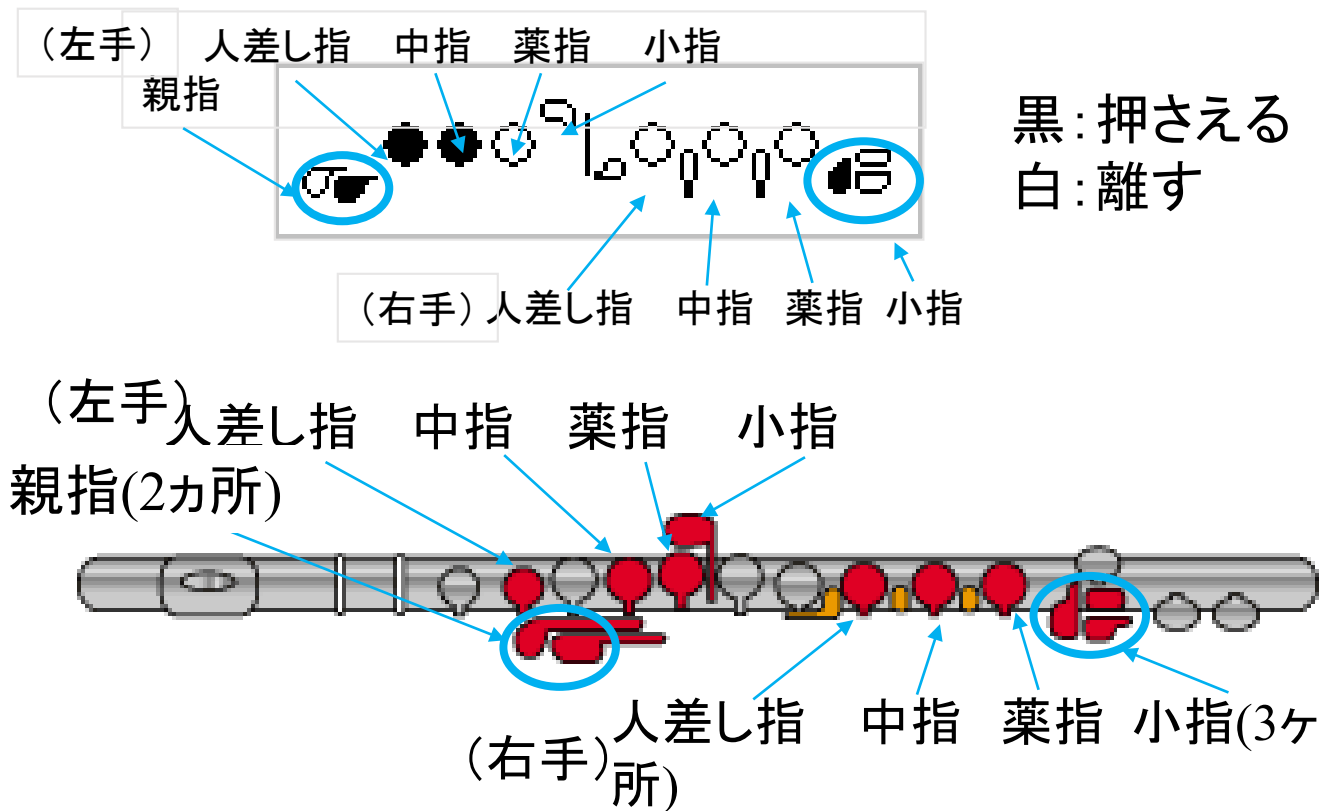
相補スラック定理を使ってみよう！

逆最適化

逆最適化によるフルート運指

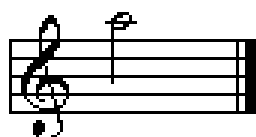
逆最適化による塾講師割当

フルートについて

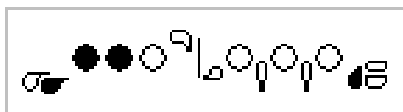


フルートの運指について

1つの音に対して、**複数の運指**がある

例：**中音のラ**  の場合

①



②



③



④



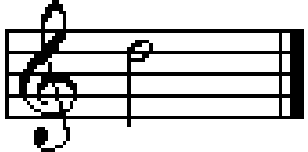
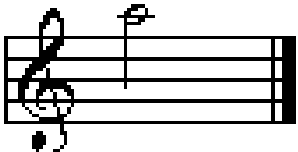
運指の数

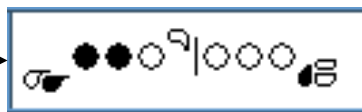
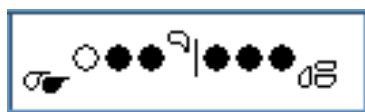
	ド	レ♭	レ	ミ♭	ミ	ファ	ソ♭	ソ	ラ♭	ラ	シ♭	シ
低音	1	1	1	1	1	1	2	1	1	8	8	3
中音	8	15	2	1	2	1	2	2	2	4	6	3
高音	6	6	4	9	8	7	9	7	7	3	8	6

(The Woodwind Fingering Guide

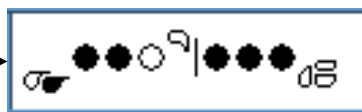
<http://www.wfg.woodwind.org/flute/index.html>)

フルートの運指について

中音のレ  → 中音のラ 



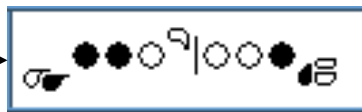
#(押さえる指)=2
#(離す指)=4



#(押さえる指)=1
#(離す指)=1



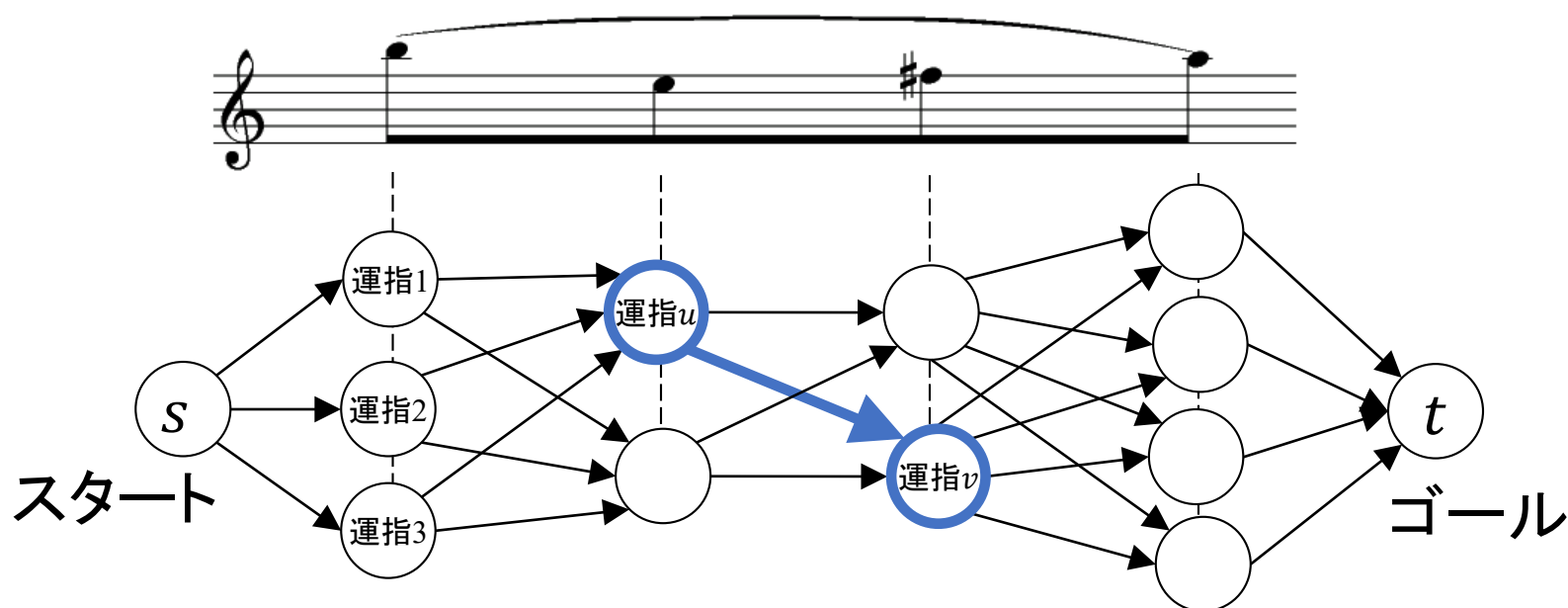
#(押さえる指)=3
#(離す指)=3



#(押さえる指)=2
#(離す指)=3

最短路モデル

$G = (V, E) : \text{有向グラフ}$
 $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+ : \text{枝長さ}$



(押さえる指) = p 本,

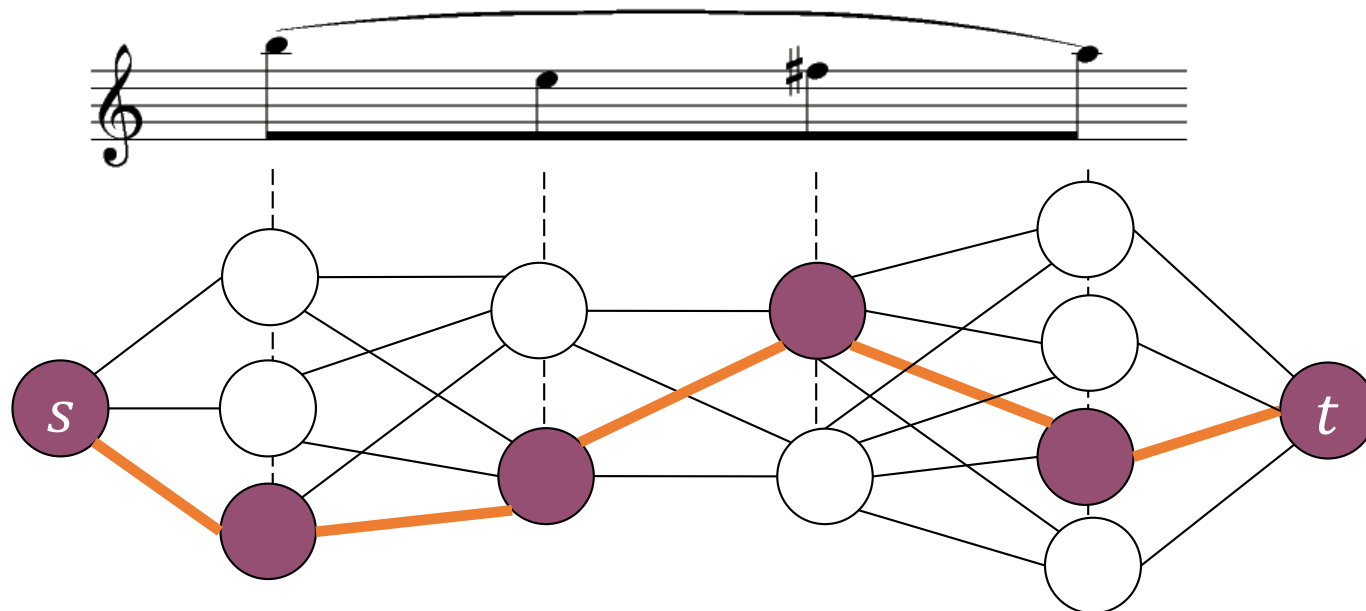
(離す指) = r 本,

(ずらす指) = s 本

枝の長さ (例) $w(u, v) = 0.15p + 0.1r + 0.75s$

最短路モデル

$G = (V, E)$: 有向グラフ
 $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$: 枝長さ



このグラフの $s - t$ 最短路問題を求める
 演奏し易い、運指の列が得られる

最短路モデルの適用結果

枝の長さ

$$w(u, v) = 0.15p + 0.1r + 0.75s$$



(“The Firebird”1919/
Igor Strawinsky より)

音名	基本運指	出力結果
D#6		
A6		
F6		
D6		
A6		
F6		
C#6		
道のり	2.3	1.6

逆最適化問題

枝の長さ

$$w(u, v) = 0.15p + 0.1r + 0.75s$$

#(押さえる指)= p , #(離す指)= r , #(ずらす指)= s

[運指間の距離]= $\alpha p + \beta r + \gamma s$

パラメータ(α, β, γ)は、どう定めたら良いのか

妥当な値・
説明力のある値

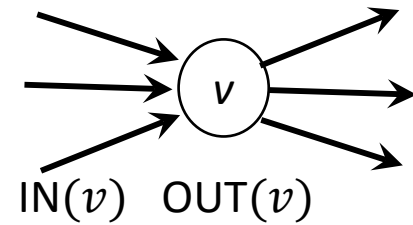
楽譜によっては、運指が指定されているフレーズがある

楽譜で与えられた 運指列(パス)が最適解となるように

距離パラメータを(α, β, γ)定める

→逆最適化問題

有向最短路問題の定式化



頂点 v での流量保存

(有向)最短路問題

$$\begin{aligned}
 \min. \quad & \sum_{e \in E} w(e)x(e) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in IN(v)} x(e) - \sum_{e \in OUT(v)} x(e) = 0 \quad (\forall v \in V \setminus \{s, t\}), \\
 & \sum_{e \in OUT(s)} x(e) = 1, \quad \sum_{e \in IN(t)} x(e) = 1, \\
 & x(e) \geq 0 \quad (\forall e \in E).
 \end{aligned}$$

$IN(v)$: 頂点 v に入る有向枝の集合

$OUT(v)$: 頂点 v から出る有向枝の集合

上記の線形計画問題は、

「全ての変数が0または1」となる最適解を持つ

逆最適化:

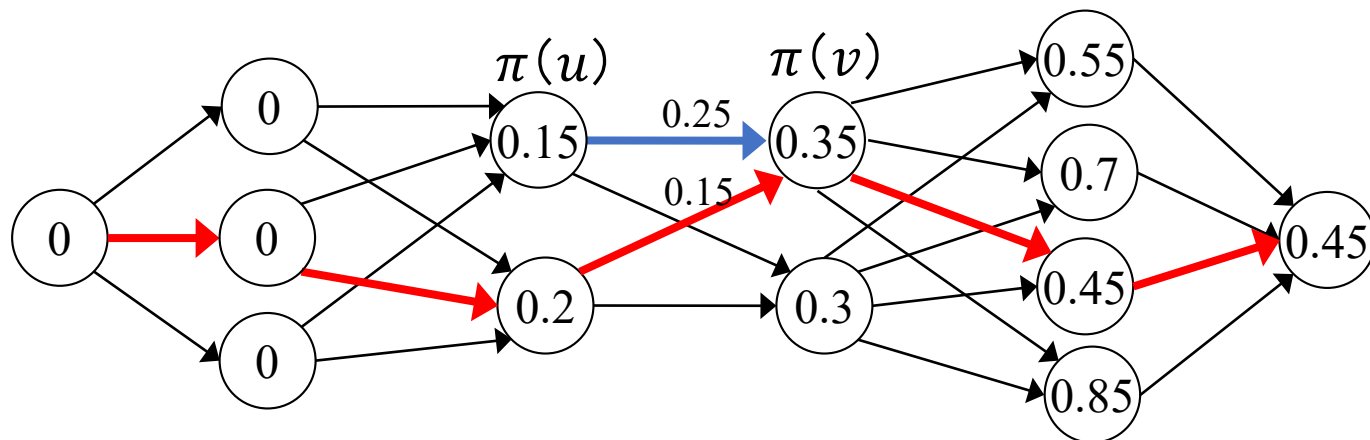
与えられたパス P が最適解になるような枝重み w を求める

逆最適化問題の定式化

有向最短路問題の双対問題

$$\max. \pi(t) - \pi(s)$$

$$\text{s.t. } \pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in E)$$



相補性条件: $x(u, v) > 0 \rightarrow \pi(v) - \pi(u) = w(u, v)$

$\pi(v) - \pi(u) < w(u, v) \rightarrow x(u, v) = 0$

「 x が主許容解、かつ、 π が双対許容解」ならば、
上記の一方だけ満たせば、他方も自動的に満たされる。

逆最短路問題の定式化

相補性条件: $x(u, v) > 0 \rightarrow \pi(v) - \pi(u) = w(u, v)$
 ~~$\pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \rightarrow x(u, v) = 0$~~

0-1最適解が存在し、その時は

(u, v) が最短路中の枝 $\leftrightarrow x(u, v) = 1 \leftrightarrow x(u, v) > 0$

与えられたパス P が最短路問題の最適解

$\leftrightarrow \exists \pi, \quad \pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in E),$
 $\pi(v) - \pi(u) = w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in P).$

π は双対問題
の許容解

相補性条件

逆最短路問題

min. ??

s.t. $\pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in E),$
 $\pi(v) - \pi(u) = w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in P).$

変数: $\pi \in \mathbb{R}^V, w \in \mathbb{R}^E$

ノルム最小化問題

例：勘で作った重み (0.15, 0.1, 0.75) に近い値が良い
逆最短路問題 (2ノルム最小化)

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{e \in E} \left(\begin{array}{c} (\alpha p(e) + \beta r(e) + \gamma s(e)) \\ - (0.15p(e) + 0.1r(e) + 0.75s(e)) \end{array} \right)^2 \\ \text{s. t.} \quad & w(e) = \alpha p(e) + \beta r(e) + \gamma s(e) \quad (\forall e \in E), \\ & \pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in E), \\ & \pi(v) - \pi(u) = w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in P), \end{aligned}$$

変数: $\pi \in \mathbb{R}^V, w \in \mathbb{R}^E, \alpha, \beta, \gamma$

$p(e)$: 枝 e で新たに押さえる指の数,

$r(e)$: 枝 e で離す指の数

$s(e)$: 枝 e でずらす指の数

自分の練習した楽譜を教師として使用できる(個別仕様の重み)

逆最適化による 塾講師割当

塾講師割当問題

塾講師に生徒を割り当てる。

各講師は最大3人の生徒を担当。

(講師-生徒)の適合度の総和を最大化

S : 生徒の集合、 T : 講師集合、

$E_+ \subseteq S \times T$: 担当可能な生徒-講師ペアの集合

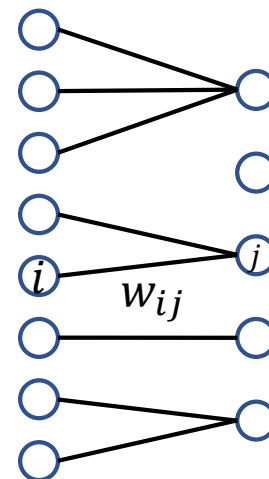
$w: E_+ \rightarrow \mathbb{R}$, w_{ij} : 生徒 i と講師 j の適合度

変数: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{生徒}i\text{を講師}j\text{が担当}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$

$$\begin{aligned} \max. \quad & \sum_{(i,j) \in E_+} w_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i: (i,j) \in E_+} x_{ij} \leq 3 \quad (\forall j \in T), \\ & \sum_{j: (i,j) \in E_+} x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in S), \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E_+). \end{aligned}$$

この問題は、0-1最適解(全ての変数が0または1の最適解)を持つ

S : 生徒 T : 講師



逆最適化

「生徒 i と講師 j の適合度」は、どう定めたら良いのか？

E_0 : 担当不可の (i, j) ペア

E_1 : 担当が望ましくない (i, j) ペア

E_2 : 担当が可能な (i, j) ペア

E_3 : 講師 j は生徒 i の担当だが、通常日ではない

E_4 : 講師 j は生徒 i の担当であり、通常日

$$E_0, E_1, \dots, E_4 \text{ は } T \times S \text{ の分割}$$

$$E_+ = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

E_1, E_2, E_3, E_4 の『妥当な』適合度 (v_1, v_2, v_3, v_4) を決めたい！

(新しい生徒や講師は、 $E_0 \cup E_1 \cup E_2$ に入れておけば良い)

ただし、 $1 \leq v_1 < v_2 < v_3 < v_4$ を満たすとする。

「前月に使った割当が、適合度の総和最大」となるように、

適合度 (v_1, v_2, v_3, v_4) を決める → 逆最適化！

相補性条件

$E_0, E_1, \dots, E_4$ は $T \times S$ の分割

$$E_+ = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

E_1, E_2, E_3, E_4 の適合度 (v_1, v_2, v_3, v_4)

主問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \sum_{k=1}^4 \sum_{(i,j) \in E_k} v_k x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j:(i,j) \in E_+} x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in S), \\ & \sum_{i:(i,j) \in E_+} x_{ij} \leq 3 \quad (\forall j \in T), \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E_+). \end{aligned}$$

先月の割り当て x^* が最適解になるような重み (v_1, v_2, v_3, v_4) を求める。

双対問題

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{i \in S} y_i + \sum_{j \in T} 3y_j \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq v_k \quad (\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall (i, j) \in E_k), \\ & y_j \geq 0 \quad (\forall j \in T). \end{aligned}$$

相補性条件

$$x_{ij} > 0 \rightarrow y_i + y_j = v_k$$

$$\sum_{i:(i,j) \in E_+} x_{ij} < 3 \rightarrow y_j = 0$$

x, y が許容解ならば、こちらは不要

$$(y_i + y_j > v_k \rightarrow x_{ij} = 0)$$

$$(y_j > 0 \rightarrow \sum_{i:(i,j) \in E_+} x_{ij} = 3)$$

逆最適化

$x^* \in \{0,1\}^{E_+}$: 前月に用いた割当

相補スラック条件

$$x_{ij}^* > 0 \ (\Leftrightarrow = 1) \rightarrow y_i + y_j = v_k$$

$$\sum_{i:(i,j) \in E_+} x_{ij}^* < 3 \ (\Leftrightarrow \leq 2) \rightarrow y_j = 0$$

逆最適化問題

min. v_4

適合度は、
あまり大きな値にしない

s.t. $y_i + y_j \geq v_k \ (\forall k \in \{1,2,3,4\}, \forall (i,j) \in E_k),$

$y_j \geq 0 \ (\forall j \in T),$

$y_i + y_j = v_k \ (\text{if } x_{ij}^* = 1),$

$y_j = 0 \ (\text{if } \sum_{i:(i,j) \in E_+} x_{ij}^* \leq 2),$

$v_1 \geq 1, \ v_2 \geq v_1 + 1, \ v_3 \geq v_2 + 1, \ v_4 \geq v_3 + 1.$

双対許容解

相補スラック
条件

この講義はここまで！

ありがとうございました