# 連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2026

## 松井担当講義
## 演習

東京科学大学　松井 知己

# 演習問題

[1]下記の主張に関する「Farkasの補題」のような主張を作りなさい。「どうやって考えた」あるいは「なぜ正しそうか」の話をしてください。証明は、「両方は成り立たない」に対応する部分はきちんと書いてください。「少なくとも1つ成り立つ」の部分は、だいたいのアイデアで十分です。線形計画の基本定理を使って良いとします。

(1) $A\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$

(2) $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > d$ (当日と式を少し変えています)

(3) $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{b}$

(4) $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

(5) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$

(6) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

[2] P: max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ s.t. $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, D: min. $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ s.t. $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.

線形計画の基本定理を使って良いとしたとき、Farkasの補題を使って、上記の主双対問題に対する強双対定理を証明してください。

(調べてみよう) 線形計画の基本定理を使わずに、Farkasの補題を使って、強双対定理を証明してください。

松井のOR記事(2000)は、
誤記があります！

# 演習問題（注）

注1：ベクトル間の不等式 $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}$ は、$p_i < q_i\ (\forall i)$ の意味。

注2：例えば下記も『Farkasの補題のような主張』とする。

（1）PとDの内、丁度1つだけが必ず解を持つ

P：$A^{(1)}x \leq b^{(1)}$ または　$A^{(2)}x \leq b^{(2)}$

D: $y^{\mathrm{T}}A^{(1)} = 0^{\mathrm{T}}, y^{\mathrm{T}}b^{(1)} < 0,\ z^{\mathrm{T}}A^{(2)} = 0^{\mathrm{T}}, z^{\mathrm{T}}b^{(2)} < 0$

「または」もOK

（2）P1,P2,P3内、丁度1つだけが必ず成り立つ

P1：$A^{(1)}x \leq b^{(1)},\ A^{(2)}x \leq b^{(2)}$

P2: $y^{\mathrm{T}}A^{(1)} = 0^{\mathrm{T}}, y^{\mathrm{T}}b^{(1)} < 0$

P3: $A^{(1)}x \leq b^{(1)}, z^{\mathrm{T}}A^{(2)} = 0^{\mathrm{T}}, z^{\mathrm{T}}b^{(2)} < 0$

「○個の内丁度1つ」もOK