

解答編

[1]

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{y} = 1$$

でもOK

(1) PとDの内、丁度1つだけが必ず解を持つ

P: $Ax < b$ ($\exists$ 内点), D: $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{0}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^\top b \leq 0, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

両方が解を持つことはない。

$Ax < b$ と $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ より、 $\mathbf{y}^\top (b - Ax) > 0$.

ゆえに $0 = \mathbf{0}^\top x = \mathbf{y}^\top Ax < \mathbf{y}^\top b \leq 0$ 矛盾。

(a) $Ax \leq b$ が解を持たないならば、 $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{0}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^\top b < 0$ が解を持ち、 $\mathbf{y}^\top b < 0$ より $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

(b) $Ax \leq b$ が解を持ち、 $Ax < b$ が解を持たない場合

$\max. x_0$ s.t. $Ax + \mathbf{1}x_0 \leq b$ が最適解を持ち、最適値が0。

ゆえに双対問題 $\min. \mathbf{y}^\top b$ s.t. $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{0}^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{1} = 1, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, は最適解を持ち、最適値が0。双対最適解が存在してDを満たす。

[1]

(2) P, D1, D2の内、丁度1つだけが必ず解を持つ

$$P: Ax \leq b, c^T x > d$$

$$D1: y^T A = 0^T, y \geq 0, y^T b < 0$$

$$D2: Ax \leq b, y^T A = c^T, y \geq 0, y^T b \leq d,$$

2つが解を持つことはない。

PとD1は、 $0 = 0^T x = y^T Ax \leq y^T b < 0$ 矛盾。D1とD2も同じ。

PとD2は、 $d < c^T x = y^T Ax \leq y^T b \leq d$ 矛盾。

P, D1, D2全てが解をもたないと仮定して矛盾を導く

(a) $Ax \leq b$ が解を持たないならば、Farkasの補題からD1が成り立つ。

(b) $Ax \leq b$ が解を持ち、Pが解を持たない(下記LPが非有界でない)場合

$\max. c^T x$ s.t. $Ax \leq b$ は最適解を持ち、最適値が d 以下。ゆえに双対問題

$\min. y^T b$ s.t. $y^T A = c^T, y \geq 0$ は最適解を持ち最適値が d 以下。

ゆえに、双対許容解が存在してD2を満たす。

$y^T b = -1$ でもOK

D: $[y^T A = 0^T, y \geq 0, y^T b < 0]$ または
 $[y^T A = c^T, y \geq 0, y^T b \leq d]$

[1]

$$y^T b = -1 \text{でもOK}$$

(3) P, D1, D2の内、丁度1つだけが必ず解を持つ

P: $Ax \leq b, Ax \neq b$ ($\exists$ 相対内点)

$y \geq 1$ は
 $y > 0$
でもOK

D1: $y^T A = 0^T, y \geq 0, y^T b < 0$

D: $[y^T A = 0^T, y \geq 0, y^T b < 0]$
または
 $[y^T A = 0^T, y \geq 1, y^T b \leq 0]$

D2: $Ax \leq b, y^T A = 0^T, y \geq 1, y^T b \leq 0,$

2つが解を持つことはない。

PとD1は、 $0 = 0^T x = y^T Ax \leq y^T b < 0$ 矛盾。D1とD2も同じ。

PとD2: $0 \leq b - Ax \neq 0$ かつ $1 \leq y$ より、 $0 < y^T (b - Ax)$ 。

ゆえに $0 = 0^T x = y^T Ax < y^T b \leq 0$ 矛盾。

P, D1, D2全てが解をもたないと仮定して矛盾を導く

(a) $Ax \leq b$ が解を持たないならば、Farkasの補題からD1が成り立つ。

(b) $Ax \leq b$ が解を持ち、Pが解を持たない場合

$\max. 1^T s$ s.t. $Ax + s = b, s \geq 0$ は最適解を持ち、最適値が0。

ゆえに双対問題 $\min. y^T b$ s.t. $y^T A = 0^T, y \geq 1$ は最適解を持ち最適値が0。

ゆえに、双対許容解が存在してD2を満たす。

[1]

(4) PとDの内、丁度1つだけが必ず解を持つ

$y^T b = -1$ でもOK

P: $Ax \leq b, x \geq 0$, D: $y^T A \geq 0^T, y \geq 0, y^T b < 0$.

両方が解を持つことはない

$$0 = 0^T x \leq y^T Ax \leq y^T b < 0 \text{ 矛盾。}$$

Pが解を持たないとする。

P': $(A|I) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0$ が解を持たない。

Farkasの補題より、D': $y^T (A|I) \geq 0^T, y^T b < 0$ が解を持つ。

すなわち。Dが解を持つ。

[1]

(5) PとDの内、丁度1つだけが必ず解を持つ

 $y^\top b = -1$ でもOK

P: $Ax = b, x \geq 0$, D: (i) $[y^\top A \geq 0^\top, y^\top b < 0]$ または
 (ii) $[y^\top A \geq 0^\top, y^\top A\mathbf{1} > 0, y^\top b \leq 0]$.

両方が解を持つことはない。

Pと(i) $0 = 0^\top x \leq y^\top Ax = y^\top b < 0$ Pと(ii) $y^\top A \geq 0^\top, y^\top A\mathbf{1} > 0$ より、 $y^\top A \neq 0$.ゆえに $0 < (y^\top A)x = y^\top b \leq 0$
 $y^\top A\mathbf{1} > 0$ は
 $y^\top A\mathbf{1} = 1$
 でもOK
(a) $[Ax = b, x \geq 0]$ が解を持たないならば、D(i)が解を持つ。

(b) $[Ax = b, x \geq 0]$ が解を持ち、 $[Ax = b, x > 0]$ が解無しならば、
 $\max. x_0$ s.t. $A(x + \mathbf{1}x_0) = b, x \geq 0$ が最適解を持ち、その最適値
 が0である。ゆえに双対問題

$\min. y^\top b$ s.t. $y^\top A \geq 0^\top, y^\top A\mathbf{1} = 1$, は最適解を持ち、最適値が0。
 双対最適解が存在してD(ii)を満たす。

[1]

(6) PとDの内、丁度1つだけが必ず解を持つ

P: $Ax = b, x \geq 0, x \neq 0$ $y^T b = -1$ でもOKD: (i) $[y^T A \geq 0^T, y^T b < 0]$ または (ii) $[y^T A \geq 1^T, y^T b \leq 0]$.

両方が解を持つことはない。

$$\text{Pと(i)} \quad 0 = 0^T x \leq y^T Ax = y^T b < 0$$

$$\text{Pと(ii)} \quad 0 < 1^T x \leq (y^T A)x = y^T b \leq 0$$

(a) $[Ax = b, x \geq 0]$ が解を持たないならば、D(i)が解を持つ。(b) $[Ax = b, x \geq 0]$ の解が $x = 0$ のみである場合。max. $1^T x$ s.t. $Ax = b, x \geq 0$ が最適解を持ち、最適値が0である。ゆえに双対問題 min. $y^T b$ s.t. $y^T A \geq 1^T$ は最適解を持ち、最適値が0。双対最適解が存在してD(ii)を満たす。

[2]

(強) 双対定理 :

主問題と双対問題が許容解を持つ

→両方が最適解を持ち、最適値は同じ値となる

$$P: \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ s.t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad D: \min. \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \text{ s.t. } \mathbf{y}^\top A = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

弱双対定理と基本定理より、PとDは最適解を持つ。PとDの最適値を z_P, z_D とする。弱双対定理から $z_P \leq z_D$ が成り立つ。 $z_P < z_D$ を仮定して矛盾を導く。Farkasの補題より。以下が成立。

$P': Ax \leq b, -c^\top x \leq -z_D$ は解を持たないことから、

$$\exists (\mathbf{y}^*, y_0^*), \mathbf{y}^{*\top} A - y_0^* \mathbf{c}^\top = \mathbf{0}^\top, \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}, y_0^* \geq 0, \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b} - y_0^* z_D < 0.$$

(1) $y_0^* > 0$ のとき: $(\mathbf{y}^*, y_0^*)$ を $\left(\frac{1}{y_0^*}\right)$ 倍したものは、

$$\mathbf{y}^\top A = \mathbf{c}^\top, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < z_D \text{ を満たし、} z_D \text{ の最小性と矛盾。}$$

(2) $y_0^* = 0$ のとき: $\mathbf{y}^{*\top} A = \mathbf{0}^\top, \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^{*\top} \mathbf{b} < 0$ が成立。Dの許容解 $\mathbf{y}$ に、 $\lambda \mathbf{y}^*$ (ただし $\lambda > 0$) を加えた解 $\mathbf{y} + \lambda \mathbf{y}^*$ はDの許容解であり、Dの目的関数値をいくらでも小さくすることができる。これはPの許容解が存在することと、弱双対定理に矛盾する。