

双対問題の基礎

京都大学大学院情報学研究科

山下信雄

紹介する内容

1. ラグランジュ双対問題

- 性質
- 解釈

2. 陽に書けるラグランジュ双対問題(注意：凸最適化に限定)

- Fenchel双対問題
- Gauge双対問題

3. 双対ギャップが小さい双対問題

- 拡張ラグランジュ関数による双対問題
- 多項式最適化問題に対するSOS緩和
- 代理双対問題

考える問題

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ \text{s.t.} & h_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, \ j = 1, \dots, r \\ & x \in X\end{array}$$

以下では $F = \{x \in R^n \mid h_i(x) = 0 \ (i = 1, \dots, m), \ g_j(x) \leq 0 \ (j = 1, \dots, r)\}$

実行可能領域 $S = F \cap X$

双対問題の望ましい性質(再掲)

- (弱)双対性：それぞれの実行可能解 x , (λ, μ) に対して

$$f(x) \geq \omega(\lambda, \mu)$$

- (適当な仮定の下)双対問題の双対問題は主問題になる.
- 計算できる
- 主問題の最適値と双対問題の最適値の差(双対ギャップ)が小さい

ラグランジュの双対問題

ラグランジュ関数(Lagrange function):

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x)$$

標示関数 :

$$\delta_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in F \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F = \left\{ x \mid \begin{array}{l} h_i(x) = 0 \ (i=1, \dots, m) \\ g_j(x) \leq 0 \ (j=1, \dots, r) \end{array} \right\}$$



$$\delta_F(x) = \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^m \\ \mu_j \geq 0 \ (j=1, \dots, r)}} \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x) \right\}$$

主問題(元の問題)のmin-max表現

$$\min f(x) + \delta_F(x)$$

$$\text{s.t. } x \in X$$

主問題の目的関数

$$\begin{aligned} f(x) + \delta_F(x) &= f(x) + \sup_{\substack{\lambda \in R^m \\ \mu_j \geq 0 \ (j=1, \dots, r)}} \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x) \right\} \\ &= \sup_{\substack{\lambda \in R^m \\ \mu_j \geq 0 \ (j=1, \dots, r)}} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x) \right\} \\ &= \sup_{\substack{\lambda \in R^m \\ \mu_j \geq 0 \ (j=1, \dots, r)}} L(x, \lambda, \mu) \end{aligned}$$

ラグランジュ双対問題

[主問題(P)]

$$\min_{x \in X} \sup_{\substack{\lambda \in R^m \\ \mu_j \geq 0 (j=1, \dots, r)}} L(x, \lambda, \mu)$$

[双対問題(D)]

$$\begin{aligned} & \max \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu) \\ & \text{s. t. } \lambda \in R^m \\ & \mu_i \geq 0 (j = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

それぞれの最適値を opt(P) , opt(D) と表すことにする.

ラグランジュ双対問題の性質①

双対問題の目的関数(必ず凹関数) :

$$\omega(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu)$$

双対問題の実行可能領域 (必ず凸集合) :

$$\Omega = \{(\lambda, \mu) \in R^{m+r} \mid \mu_j \geq 0 (j = 1, \dots, r)\}$$

弱双対定理

$$f(x) \geq w(\lambda, \mu) \quad \forall x \in S, (\lambda, \mu) \in \Omega$$

⇒ 下界値の計算に利用できる

弱双対定理の証明

$x \in S, (\lambda, \mu) \in \Omega$ より

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x) \\ &= L(x, \lambda, \mu) \\ &\geq \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu) \\ &= \omega(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

ω は凹関数($-\omega$ は凸関数)

任意の $(\lambda^1, \mu^1), (\lambda^2, \mu^2) \in R^m, \alpha \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned}\omega(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2, \alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) &= \inf_{x \in X} L(x, \alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2, \alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) \\ &= \inf_{\substack{x \in X \\ y \in X \\ x=y}} \left\{ \alpha L(x, \lambda^1, \mu^1) + (1-\alpha)L(y, \lambda^2, \mu^2) \right\} \\ &\geq \inf_{\substack{x \in X \\ y \in X}} \left\{ \alpha L(x, \lambda^1, \mu^1) + (1-\alpha)L(y, \lambda^2, \mu^2) \right\} \\ &= \inf_{x \in X} \left\{ \alpha L(x, \lambda^1, \mu^1) \right\} + \inf_{y \in X} \left\{ (1-\alpha)L(y, \lambda^2, \mu^2) \right\} \\ &= \alpha\omega(\lambda^1, \mu^1) + (1-\alpha)\omega(\lambda^2, \mu^2)\end{aligned}$$

主問題が何であれ， 双対問題は凸最適化問題

双対ギャップ(duality gap)

主問題の最適値と双対問題の最適値の差を双対ギャップという.

$$\text{opt(P)} - \text{opt(D)}$$

一般の最適化問題では双対ギャップは**正**になることが多い.

適当な条件を満たす凸最適化問題では双対ギャップが0なる.

また, trust region subproblemなど, 双対ギャップが0になる非凸な最適化問題も存在する.

強双対定理

$f, g_i (i = 1, \dots, r)$: 凸関数

$h_i (i = 1, \dots, m)$: 1 次関数

$$X = R^n$$

適当な制約想定が成り立つ.

主問題に最適解が存在する.



双対問題は最適解をもつ.

主問題と双対問題の最適値は一致する.

Karush-Kuhn-Tucker条件を用いて証明できる.

ラグランジュ双対問題の例：凸2次最適化(QP)

凸2次最適化問題

$$\min \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x$$

$$\text{s.t. } (a^i)^\top x - b_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$x \geq 0$$

Q を正定値対称行列とする.

$$L(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + \sum_{i=1}^m \lambda_i ((a^i)^\top x - b_i) + \sum_{j=1}^n \mu_j (-x_j)$$

QPの双対問題の目的関数

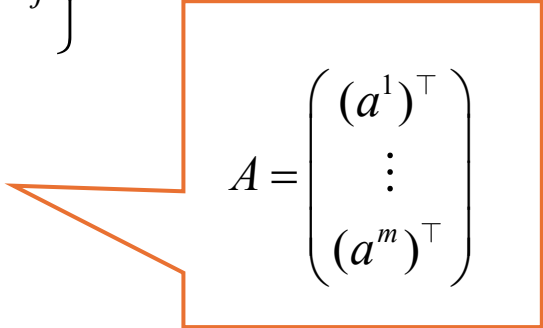
双対問題の目的関数は

$$\omega(\lambda, \mu) = \inf_{x \in R^n} L(x, \lambda, \mu)$$

$$= \inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + \sum_{i=1}^m \lambda_i ((a^i)^\top x - b_i) + \sum_{j=1}^n \mu_j (-x_j) \right\}$$

$$= -\sum_{i=1}^m b_i \lambda_i + \inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + \sum_{j=1}^n \left(c_j + \sum_{i=1}^m a_j^i \lambda_i - \mu_j \right) x_j \right\}$$

$$= -b^\top \lambda + \inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + (c + A^\top \lambda - \mu)^\top x \right\}$$


$$A = \begin{pmatrix} (a^1)^\top \\ \vdots \\ (a^m)^\top \end{pmatrix}$$

$\inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + (c + A^\top \lambda - \mu)^\top x \right\}$ の計算

$g(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + (c + A^\top \lambda - \mu)^\top x$ は凸関数.

最適性の条件: $\nabla g(\bar{x}) = Q\bar{x} + c + A^\top \lambda - \mu = 0$ より

$$\bar{x} = -Q^{-1}(c + A^\top \lambda - \mu)$$

よって, $\inf_{x \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + (c + A^\top \lambda - \mu)^\top x \right\}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \bar{x}^\top Q \bar{x} + (c + A^\top \lambda - \mu)^\top \bar{x} \\ &= \frac{1}{2} (Q^{-1}(c + A^\top \lambda - \mu))^\top Q (Q^{-1}(c + A^\top \lambda - \mu)) - (c + A^\top \lambda - \mu)^\top (Q^{-1}(c + A^\top \lambda - \mu)) \\ &= -\frac{1}{2} (c + A^\top \lambda - \mu)^\top Q^{-1} (c + A^\top \lambda - \mu) \end{aligned}$$

Q P の双対問題

$$\max w(\lambda, \mu)$$

$$\text{s.t.} \quad \mu_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n)$$



$$\max -\frac{1}{2} \left(c + A^\top \lambda - \mu \right)^\top Q^{-1} \left(c + A^\top \lambda - \mu \right) - b^\top \lambda$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda \in R^m, \mu \geq 0$$

アウトライン

1. ラグランジュ双対問題

- 性質
- 解釈

2. 陽に書けるラグランジュ双対問題

- Fenchel双対問題
- Gauge双対問題

3. 双対ギャップが小さい双対問題

- 拡張ラグランジュ関数による双対問題
- 代理双対問題
- 多項式最適化問題に対するSOS緩和

解釈①：鞍点と強双対性

$G: R^n \times R^m \rightarrow R$ とする.

ゲーム理論における**均衡**と関係

次式を満たす $(x^*, \lambda^*) \in R^n \times R^m$ を G の**鞍点(saddle point)**という.

$$G(x, \lambda^*) \geq G(x^*, \lambda^*) \geq G(x^*, \lambda) \quad \forall (x, \lambda) \in R^n \times R^m$$

$\theta(x) = \sup_{\lambda} G(x, \lambda), \quad \omega(\lambda) = \inf_x G(x, \lambda)$ としたとき, 必ず, $\theta(x) \geq \omega(\lambda)$

(x^*, λ^*) が鞍点であることの必要十分条件は $\theta(x^*) = \omega(\lambda^*)$

最適化問題の強双対性は $G = L$ とした鞍点性と同じ.

解釈②：最適性の条件との関係

凸最適化においてKKT条件のラグランジュ乗数は双対問題の最適解.

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 \\ \lambda_i^* \geq 0, g_i(x^*) \leq 0, \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega(\lambda^*) &= \min_x L(x, \lambda^*) \\ &= L(x^*, \lambda^*) \\ &= f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \\ &= f(x^*) \end{aligned}$$

強双対性がなりたつとき，主問題と双対問題の最適解はKKT点

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \omega(\lambda^*) \\ \lambda^* &\geq 0 \\ g_i(x^*) &\leq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(x^*) &= \inf_x L(x, \lambda^*) \leq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \leq f(x^*) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \\ &\Rightarrow \inf_x L(x, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) = L(x^*, \lambda^*) \\ &\Rightarrow 0 = \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) \end{aligned}$$

解釈③ 緩和問題として

緩和問題(relaxation problem)：制約条件を緩めて解きやすくした問題

二つのタイプの緩和問題

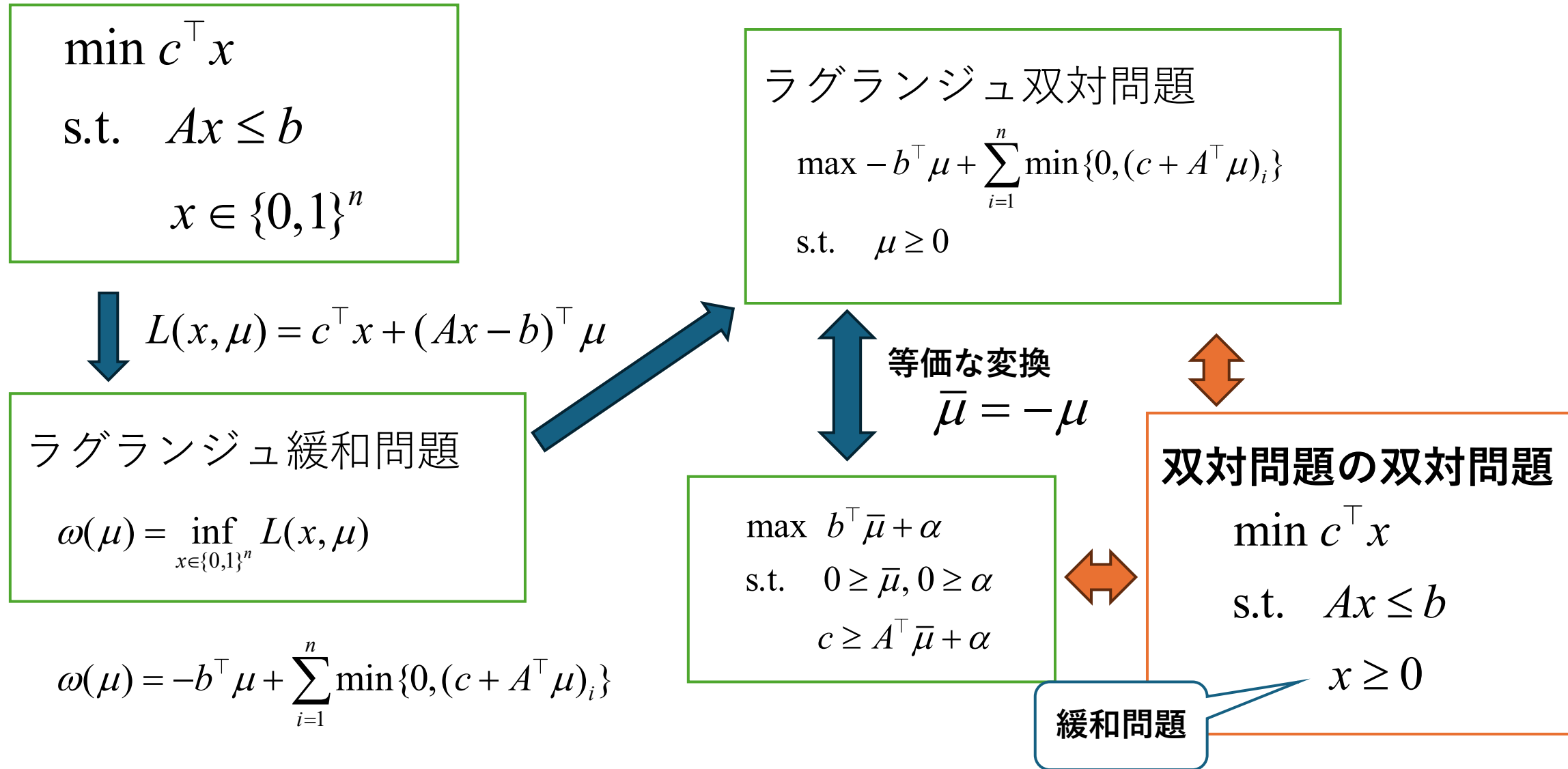
- (i) 制約条件をペナルティとして目的関数に移す．（ラグランジュ緩和etc）
- (ii) 実行可能集合を含む凸集合に緩和する．（SDP緩和）

ラグランジュ緩和問題：双対問題の目的関数を計算する問題．

$$\min L(x, \lambda, \mu)$$

$$\text{s.t. } x \in X$$

例 1 : 0-1線形整数計画問題に対するラグランジュ緩和問題



補足

制約 $1 \geq x_i$ ($i = 1, \dots, n$) を加味したラグランジュ関数を

$$L(x, \mu^1, \mu^2) = c^\top x + (Ax - b)^\top \mu^1 + (x - e)^\top \mu^2$$

と定義する．ただし, $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$.

このラグランジュ関数で定義された**ラグランジュ双対問題の双対問題**は

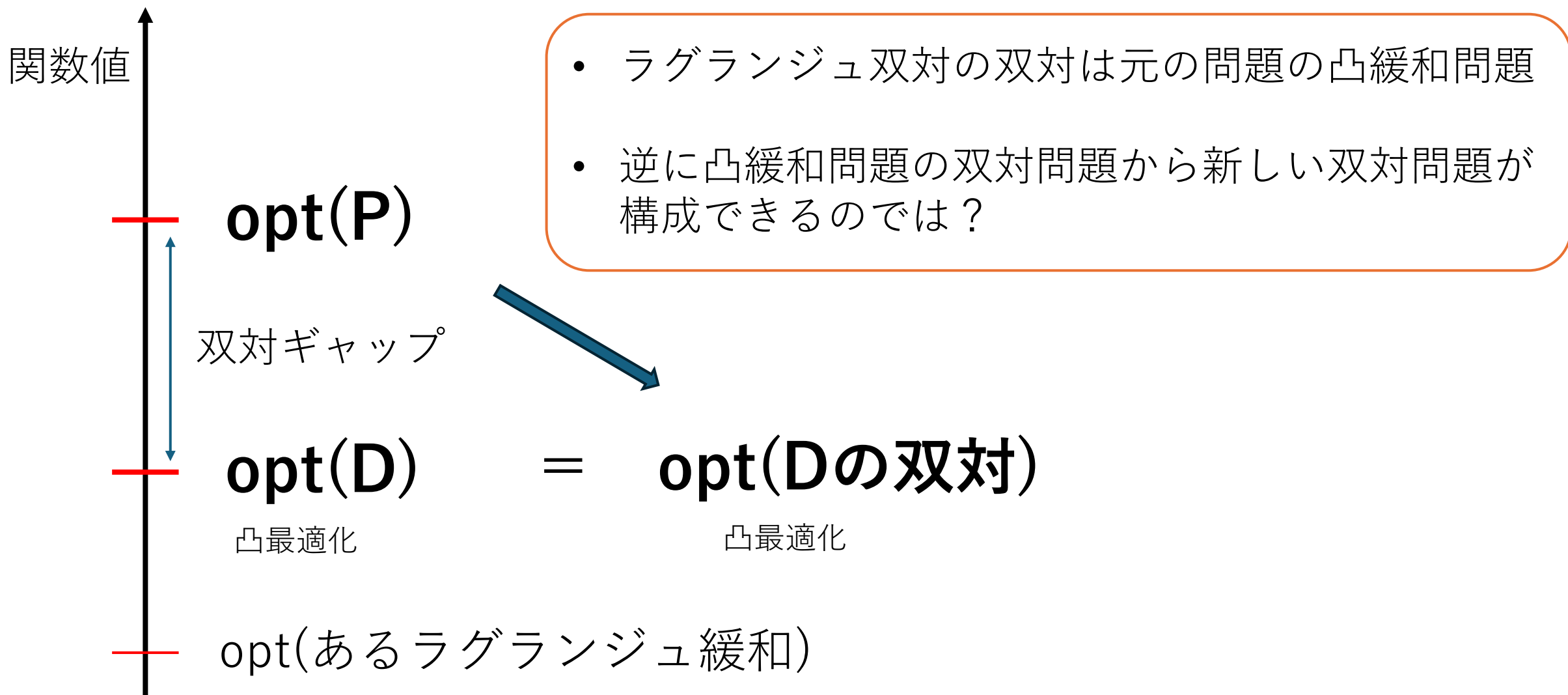
$$\min c^\top x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$0 \leq x \leq 1$$

となり, よりタイトな緩和問題になる．（こういうところが泥臭い）

非凸な問題に対するラグランジュ双対と緩和問題



2次制約2次計画問題のSDP緩和

2次制約2次計画問題

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

ただし, f, h_i は2次関数(凸とは限らない.)

不等式 $g(x) \leq 0$ は $g(x) + x_{n+1}^2 = 0$ とすれば等式で表せる.

2次制約2次計画問題の例

多項式最適化：問題に表れる関数がすべて多項式

2次以上の場合：

$$\begin{aligned}x_3 &= x_1^2, \quad x_4 = x_1 x_3 \\x_1^3 x_2^4 &= 1 \Leftrightarrow x_5 = x_2^2, \quad x_6 = x_5^2 \\x_4 x_6 &= 1\end{aligned}$$

0-1整数計画問題：

$$x_i \in \{0, 1\} \Leftrightarrow x_i(x_i - 1) = 0$$

2次制約2次計画問題に対する ラグランジュ双対問題とSDP緩和

まず、ラグランジュ双対問題を与える.

ラグランジュ関数：
$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x)$$

双対問題の目的関数：
$$\omega(\lambda) = \inf_{x \in R^n} L(x, \lambda)$$

ラグランジュ双対問題の変形(1)

$$\begin{array}{ll}\max & \omega(\lambda) \\ \text{s.t.} & \lambda \in R^m\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\max_{\lambda, t} & t \\ \text{s.t.} & \omega(\lambda) \geq t\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\max_{\lambda, t} & t \\ \text{s.t.} & L(x, \lambda) - t \geq 0 \quad \forall x \in R^n\end{array}$$

ラグランジュ関数の変形

以下では

$$f(x) = x^\top A_0 x + 2b_0^\top x + c_0$$

$$h_i(x) = x^\top A_i x + 2b_i^\top x + c_i$$

S^n は対称行列の集合

とする. ただし, $A_i \in S^n$, $b_i \in R^n$, $c_i \in R$ ($i = 0, 1, \dots, m$)

ラグランジュ関数は $L(x, \lambda) = x^\top A(\lambda)x + 2b(\lambda)^\top x + c(\lambda)$ と表せる.

ただし,

$$A(\lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i, \quad b(\lambda) = b_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i, \quad c(\lambda) = c_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i,$$

ラグランジュ双対問題の変形(2)

$$\max_{\lambda, t} t$$

$$\text{s.t. } L(x, \lambda) - t \geq 0 \quad \forall x \in R^n$$



$$\max_{\lambda, t} t$$

$$\text{s.t. } x^\top A(\lambda)x + 2b(\lambda)^\top x + c(\lambda) - t \geq 0 \quad \forall x \in R^n$$



$$\max_{\lambda, t} t$$

$$\text{s.t. } \begin{bmatrix} c(\lambda) - t & b(\lambda)^\top \\ b(\lambda) & A(\lambda) \end{bmatrix} \succeq 0$$

$X \succeq 0 \Leftrightarrow X$ は半正定値対称行列

変形の証明

$$\begin{bmatrix} c(\lambda) - t & b(\lambda)^\top \\ b(\lambda) & A(\lambda) \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} c(\lambda) - t & b(\lambda)^\top \\ b(\lambda) & A(\lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall x \in R^n, s \in R$$

$$\Leftrightarrow s^2(c(\lambda) - t) + 2sb(\lambda)^\top x + x^\top A(\lambda)x \geq 0 \quad \forall x \in R^n, s \in R$$

$$\Leftrightarrow s^2(c(\lambda) - t) + 2sb(\lambda)^\top x + x^\top A(\lambda)x \geq 0 \quad \forall x \in R^n, s \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (c(\lambda) - t) + 2b(\lambda)^\top \frac{x}{s} + \left(\frac{x}{s}\right)^\top A(\lambda) \frac{x}{s} \geq 0 \quad \forall x \in R^n, s \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (c(\lambda) - t) + 2b(\lambda)^\top x + x^\top A(\lambda)x \geq 0 \quad \forall x \in R^n$$

2次制約2次計画問題のSDP緩和

まず、問題を等価な半正定値制約をもつ問題に変換する。
いま、

$$Q_i = \begin{bmatrix} c_i & b_i^\top \\ b_i & A_i \end{bmatrix} \in S^{n+1}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と定義すると、 $x_0 = 1$ のとき、

$$f_i(x) = \bar{x}^\top Q \bar{x} = \text{trace}(\bar{x}^\top Q \bar{x}) = \text{trace}(Q \bar{x} \bar{x}^\top) = \langle Q, \bar{x} \bar{x}^\top \rangle$$

2次制約2次計画問題と等価な問題

$$\begin{array}{ll}\min & \langle Q_0, \bar{x}\bar{x}^\top \rangle \\ \text{s.t} & \langle Q_i, \bar{x}\bar{x}^\top \rangle = 0, i = 1, \dots, m \\ & x_0 = 1\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\min & \langle Q_0, X \rangle \\ \text{s.t} & \langle Q_i, X \rangle = 0, i = 1, \dots, m \\ & X_{11} = 1 \\ & X \in S_+^{n+1} \\ & \text{rank}(X) = 1\end{array}$$

$$X = \bar{x}\bar{x}^\top$$

となる $\bar{x} \in R^{n+1}$ が存在する
必要十分条件は

$$\begin{array}{l}X \in S_+^{n+1} \\ \text{rank}(X) = 1\end{array}$$

$$X \in S_+^n \Leftrightarrow X \text{ は半正定値対称行列}$$

$$\text{証明： } X = \overline{x}x^\top \iff \begin{array}{l} X \in S^{n+1} \\ \text{rank}(X) = 1 \end{array}$$

⇒：明らか.

$\lambda_i(x)$ は i 番目の大きい X の固有値

⇐： $\text{rank}(X) = 1$ より $X \neq 0$.

さらに $X \in S_+^{n+1}$ より, $\lambda_1(X) > 0, \lambda_2(X) = \dots = \lambda_{n+1}(X) = 0$.

固有値 $\lambda_i(X)$ に対応する固有ベクトルを v^i とする.

ただし, $\{v^i\}$ は正規直交系とする. このとき

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) v^i (v^i)^\top = \lambda_1(X) v^1 (v^1)^\top$$

よって, $\bar{x} = \sqrt{\lambda_1(X)} v^1$ が所望のベクトルとなる.

SDP緩和

$$\min \langle Q_0, X \rangle$$

$$\text{s.t. } \langle Q_i, X \rangle = 0, i = 1, \dots, m$$

$$X_{11} = 1$$

$$X \in S_+^{n+1}$$

$$\text{rank}(X) = 1$$

rankは不連続な関数



SDP緩和問題

$$\min \langle Q_0, X \rangle$$

$$\text{s.t. } \langle Q_i, X \rangle = 0, i = 1, \dots, m$$

$$X_{11} = 1$$

$$X \in S_+^{n+1}$$

2次制約2次計画問題に対するラグランジュ双対問題とSDP緩和問題

2次制約2次計画問題

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$



SDP緩和問題

$$\min \langle Q_0, X \rangle$$

$$\text{s.t. } \langle Q_i, X \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$X_{11} = 1$$

$$X \in S_+^{n+1}$$



双対問題

ラグランジュ双対問題

$$\max_{\lambda, t} t$$

$$\text{s.t. } \begin{bmatrix} c(\lambda) - t & b(\lambda)^\top \\ b(\lambda) & A(\lambda) \end{bmatrix} \succeq 0$$

解釈④：ペナルティ法として

次の問題を考える．この問題の最適解を x^* とする．

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & h(x) = 0 \end{array}$$

ペナルティ法：次の問題の最適解を $x^*(\alpha)$ とする．

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) + \alpha \|h(x)\|^2 \\ \text{s.t.} & x \in R^n \end{array}$$

このとき、 $f(x^*) \geq f(x^*(\alpha)) + \alpha \|h(x^*(\alpha))\|^2$
さらに $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(x^*(\alpha)) + \alpha \|h(x^*(\alpha))\|^2 = f(x^*)$

ペナルティ法は

ペナルティ問題の目的関数は

$$f(x) + \alpha \|h(x)\|^2 = f(x) + \langle \alpha h(x), h(x) \rangle$$

となる．ここで， $\lambda = \alpha h(x^*(\alpha))$ とすると

$$f(x^*(\alpha)) + \alpha \|h(x^*(\alpha))\|^2 = \inf_x \left\{ f(x) + \alpha \|h(x)\|^2 \right\} \geq \inf_x L(x, \lambda) = \omega(\lambda) = \omega(\alpha h(x^*(\alpha)))$$

よって，もし $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega(\alpha h(x^*(\alpha))) = f(x^*)$ であれば，

$\alpha h(x^*(\alpha))$ は双対問題の最適解に収束する．

(そのような条件が成り立たなくても $(x^*(\alpha), \alpha h(x^*(\alpha)))$ はKKT点に収束する．)

ラグランジュ双対問題の補足①

Q. 主問題の最適解において制約想定がみたされないときは？

A. 双対問題は解をもたないことがある.

例：

$$\min x$$

$$\text{s.t. } x^2 \leq 0$$

$$\omega(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{if } \mu = 0 \\ -\frac{1}{4\mu} & \text{if } \mu > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\max -\frac{1}{4\mu} \\ &\text{s.t. } \mu > 0 \end{aligned}$$

また、凸最適化であっても、双対ギャップが0にならないことがある.

制約想定が満たされるように**問題を摂動**させたら？

Tsuchiya, T., Lourenço, B. F., Muramatsu, M., & Okuno, T. (2024). Closing duality gaps of SDPs completely through perturbation when singularity degree is one. *Optimization Methods and Software*, 39(5), 1040–1067.

ラグランジュ双対問題の補足②

Q. 双対問題の最適解 (λ^*, μ^*) から、主問題の最適解を得られるのか？

A. 一般には得られない.

以下の条件を満たせば、KKT点が得られる.

$$x^* \in \arg \min_{x \in X} L(x, \lambda^*, \mu^*), \quad x^* \in S$$

Q. 双対問題の双対問題は元の問題になるのか？

A. 一般にはならない.

適当な条件を満たす凸最適化問題であれば,

その双対問題の双対問題はもとの凸最適化問題となる.

ラグランジュ双対問題の補足③

Q. ラグランジュ双対問題は唯一に定まる？

A. いろいろな構成方法がある.

院試問題： Write out **a** dual problem of problem (P).

- (i) 全ての制約をラグランジュ関数に入れなくてもよい.
- (ii) 主問題を等価に変換して, ラグランジュ双対問題を構成してもよい.

$$\min x_1^2 - x_2^2$$

$$\text{s.t. } x_2 = 1$$

双対ギャップあり

$$\min x_1^2 - x_2^2$$

$$\text{s.t. } (x_2 - 1)^2 = 0$$

双対ギャップなし

応用によっては効果大
とても泥臭い職人技

アウトライン

1. ラグランジュ双対問題

- 性質
- 解釈

2. 陽に書けるラグランジュ双対問題（ただし凸最適化問題に限る）

- Fenchel双対問題
- Gauge双対問題

3. 双対ギャップが小さい双対問題

- 拡張ラグランジュ関数による双対問題
- 多項式最適化問題のSDP緩和による双対問題
- 代理双対問題

Fenchel 双対問題

凸最適化問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K f_k(x_k) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K A_k x_k = b \end{aligned}$$

- $V = V_1 \times \cdots \times V_K$
- $x_k \in V_k$
- $f_k : V_k \rightarrow R \cup \{\infty\}$ は **凸関数**
- $A_k : V_k \rightarrow R^m$ は線形写像, $b \in R^m$

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x_1) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \in S \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x_1) + f_2(x_2) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 0 \\ & \text{ただし, } f_2(x_2) := \delta_S(x_2) \end{aligned}$$

Lagrange双対問題の導出

$$L(x, \lambda) = \sum_{k=1}^k f_k(x_k) + \left\langle \lambda, \sum_{k=1}^K A_k x_k - b \right\rangle$$

$$\omega(\lambda) = \inf_x \left\{ \sum_{k=1}^k f_k(x_k) + \left\langle \lambda, \sum_{k=1}^K A_k x_k - b \right\rangle \right\}$$

$$= -\langle \lambda, b \rangle - \sup_x \left\{ \sum_{k=1}^k \langle -\lambda, A_k x_k \rangle - \sum_{k=1}^k f_k(x_k) \right\}$$

$$= -\langle \lambda, b \rangle - \sum_{k=1}^K \sup_k \left\{ \langle -A_k^* \lambda, x_k \rangle - f_k(x_k) \right\}$$

$$= -\langle \lambda, b \rangle - \sum_{k=1}^K f_k^*(-A_k^* \lambda)$$

A_k^* は A_k の
随伴作用素

Fenchel 双対問題

$$\max -\langle \lambda, b \rangle - \sum_{k=1}^K f_k^*(-A_k^* \lambda)$$

特別な場合

$$\min f(x) + g(Ax)$$



$$\max -f^*(A^* \lambda) - g^*(-\lambda)$$

$$\min f_0(x) + \sum_{k=1}^K f_k(x)$$



$$\max -f_0^*\left(-\sum_{k=1}^K \lambda_k\right) - \sum_{k=1}^K f_k^*(\lambda_k)$$

Fenchel双対の例：錐最適化問題

$$\begin{array}{ll}\min & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & \langle a_i, x \rangle = b_i, i = 1, \dots, m \\ & x \in K\end{array}$$

ここで

- K はベクトル空間 V 上の凸錐
- $c, a_i \in V, b_i \in \mathbb{R}$ は定数.

錐と共役関数

錐 C の極錐, 双対錐 :

$$\text{極錐 : } C^* = \{y \in V \mid \langle y, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in C\}$$

$$\text{双対錐 : } C^d = \{y \in V \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\} = -C^*$$

錐 C 上の線形関数 : $f(x) = \langle a, x \rangle + b + \delta_C(x)$

$$f^*(v) = \begin{cases} -b & \text{if } v - a \in C^* \\ +\infty & \text{if } v - a \notin C^* \end{cases}$$

錐最適化と等価な形式

$$\min f(Ax) + g(x)$$

$$\text{s.t. } x \in V$$

ただし, $A: V \rightarrow R^m$, $f: R^m \rightarrow R \cup \{+\infty\}$, $g: V \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ は

$$Ax = \begin{pmatrix} \langle a_1, x \rangle \\ \langle a_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \end{pmatrix}$$

$$f(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v_i = b_i, i = 1, \dots, m \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \langle c, x \rangle + \delta_K(x) \\ &= \begin{cases} \langle c, x \rangle & \text{if } x \in K \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

錐最適化のFenchel双対

$$\begin{aligned} \max & -f^*(-v) - g^*(A^*v) \\ \text{s.t. } & v \in R^m \end{aligned}$$

ここで

$$f^*(v) = b^\top v, \quad g^*(u) = \begin{cases} 0 & \text{if } u - c \in K^* \\ +\infty & \text{if } u - c \notin K^* \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \max & \langle b, v \rangle \\ \text{s.t. } & A^*v - c \in K^* \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max & \langle b, v \rangle \\ \text{s.t. } & c - A^*v \in K^d \end{aligned}$$

アウトライン

1. ラグランジュ双対問題

- 性質
- 解釈

2. 陽に書けるラグランジュ双対問題

- Fenchel双対問題
- **Gauge双対問題**

3. 双対ギャップが小さい双対問題

- 拡張ラグランジュ関数による双対問題
- 多項式最適化問題のSOS緩和による双対問題
- 代理双対問題

Gauge 双対問題の動機

数学的興味：

Gauge関数の特性を生かした，
Lagrange双対問題とは違った双対問題はあるか？

工学的動機：

制約条件と目的関数にある定数行列を入れ替えたい．

Gauge最適化

$$\min \rho(x)$$

$$\text{s.t. } \kappa(Ax - b) \leq \tau$$

Lagrange双対問題

$$\max \langle b, \lambda \rangle - \tau \rho^\circ(\lambda)$$

$$\text{s.t. } \kappa^\circ(A^\top \lambda) \leq 1$$

- 大規模凸最適化の代表的な解法は，実行可能集合の射影を計算することが多い．

Gauge双対性

R. M. Freund, Dual gauge programs, with applications to quadratic programming and the minimum-norm problem. Mathematical Programming, 38(1):47{67, 1987.

ρ を gauge 関数 とし, 次の二つの問題を考える.

$$\begin{array}{ll} \min & \rho(x) \\ \text{s.t.} & x \in C \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & \rho^0(y) \\ \text{s.t.} & y \in C^1 \end{array}$$

注意 最小化問題

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{1}{\rho^0(y)} \\ \text{s.t.} & y \in C^1 \end{array}$$

ただし, C は凸集合で, C^1 は次式で定義された集合.

$$C^1 = \{y \mid \langle x, y \rangle \geq 1 \quad \forall y \in C\}$$

anti-polar という

$x \in C, y \in C^1$ のとき,

$$\rho(x)\rho^0(y) \geq \langle x, y \rangle \geq 1$$

これを弱双対と考える

$$\rho(x) \geq \frac{1}{\rho^0(y)}$$

Gauge双対問題

Friedlander, Macedo, and Pong, Gauge Optimization and duality, SIAM Journal on Optimization, vol. 24, pp. 1999-2022, 2014.

$$C = \{x \mid \kappa(Ax - b) \leq \tau\} \text{ のとき } C^1 = \{A^\top y \mid \langle b, y \rangle - \tau \kappa^0(y) \geq 1\}$$

Gauge最適化問題

$$\min \rho(x)$$

$$\text{s.t. } \kappa(Ax - b) \leq \tau$$

Gauge双対問題

$$\min \rho^0(A^\top y)$$

$$\text{s.t. } \langle b, y \rangle - \tau \kappa^0(y) \geq 1$$

性質

- Lagrange双対の最適値を D_L , Gauge双対の最適値を D_G とすると

$$D_L D_G = 1$$

- Lagrange双対の最適解を λ^* , Gauge双対の最適解を y^* とすると

$$y^* = D_G \lambda^*$$

アウトライン

1. ラグランジュ双対問題

- 性質
- 解釈

2. 陽に書けるラグランジュ双対問題

- Fenchel双対問題
- Gauge双対問題

3. 双対ギャップが小さい双対問題

- 拡張ラグランジュ関数による双対問題
- 多項式最適化問題のSOS緩和による双対問題
- 代理双対問題

どうしたら双対ギャップが小さくなる？

主問題

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & x \in S\end{array}$$

ラグランジュ双対問題

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in S} f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

アイデア 1 : ペナルティ関数を入れる.

➡ 拡張ラグランジュ関数

アイデア 2 : ラグランジュ乗数を x によって変える (x の関数にする).

➡ Sum of Squares でラグランジュ乗数を表す

アイデア 3 : なるべく制約条件に残す.

➡ 複数の制約条件をひとつの制約条件で代替する.



連続最適化問題と拡張ラグランジュ関数

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ \text{s.t.} & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r\end{array}$$

ラグランジュ関数 : $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(x)$

拡張ラグランジュ関数(Augmented Lagrangian) (等式制約のみ) :

$$L_c(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^m h_i(x)^2$$

等式制約に対するペナルティ

目的関数を $f(x) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^m h_i(x)^2$ とした
ラグランジュ関数とみることこもできる

不等式制約の拡張ラグランジュ関数

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } g(x) \leq 0$$



$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } g(x) + y^2 = 0$$

拡張ラグランジュ関数 $L_c(x, y, \mu) = f(x) + \mu(g(x) + y^2) + \frac{c}{2}(g(x) + y^2)^2$

$$L_c(x, \mu) \equiv \inf_y L_c(x, y, \mu)$$

$$z = y^2$$

$$z \geq 0$$

$$= L(x, \mu) + \frac{c}{2} g(x)^2 + \inf_{z \geq 0} \left\{ (\mu + cg(x))z + \frac{c}{2} z^2 \right\}$$

1変数2次関数の最小化

$$= L(x, \mu) + \frac{c}{2} g(x)^2 + (\mu + cg(x)) \max \left\{ 0, \frac{-\mu - cg(x)}{c} \right\} + \frac{c}{2} \max \left\{ 0, \frac{-\mu - cg(x)}{c} \right\}^2$$

$$= L(x, \mu) + \frac{c}{2} g(x)^2 - \frac{1}{c} \max \{ 0, -\mu - cg(x) \}^2 + \frac{1}{2c} \max \{ 0, -\mu - cg(x) \}^2$$

$$\max \{ 0, -t \}^2 = t^2 - \max \{ 0, t \}^2$$

$$= L(x, \mu) + cg(x)^2 - \frac{1}{2c} \max \{ 0, -\mu - cg(x) \}^2$$

$$= f(x) + \mu g(x) + cg(x)^2 - \frac{1}{2c} (-\mu - cg(x))^2 + \frac{1}{2c} \max \{ 0, \mu + cg(x) \}^2$$

$$= f(x) + \frac{1}{2c} \left(\max \{ 0, \mu + cg(x) \}^2 - \mu^2 \right)$$

一般の拡張ラグランジュ関数

$$\begin{aligned} L_c(x, \lambda, \mu) &= L(x, \lambda, \mu) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^m h_i(x)^2 + \sum_{j=1}^r \left(\frac{c}{2} g_j(x)^2 - \frac{1}{2c} \max \{0, -\mu_j - cg_j(x)\}^2 \right) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i h_i(x) + \frac{c}{2} h_i(x)^2 \right) + \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^r \left(\max \{0, \mu_j + cg_j(x)\}^2 - \mu_j^2 \right) \end{aligned}$$

性質

- 凸最適化問題であれば, x に関して凸関数
- $L_c(x, \lambda, \mu) \geq L(x, \lambda, \mu)$
- $\nabla_x L_c(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m (\lambda_i + ch_i(x)) \nabla h_i(x) + \sum_{j=1}^r \max \{0, \mu_j + cg_j(x)\} \nabla g_j(x)$

拡張ラグランジュ関数を用いた双対問題

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_c) \quad & \max \quad \omega_c(\lambda, \mu) \\ & \text{s.t.} \quad \lambda \in R^m, \mu \geq 0 \end{aligned}$$

$$\omega_c(\lambda, \mu) = \inf_x L_c(x, \lambda, \mu)$$

性質

- ω_c は凹関数. $\Rightarrow$ 凸最適化
- 弱双対定理が成り立ち, $\text{opt}(\mathbf{P}) \geq \text{opt}(\mathbf{D}_c) \geq \text{opt}(\mathbf{D})$

$\text{opt}(\mathbf{P}) = \text{opt}(\mathbf{D}_c) > \text{opt}(\mathbf{D})$ の例

$$\begin{array}{ll} \min & -x^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$



KKT条件

$$\begin{array}{l} -2x - \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ x \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_1 x = 0 \\ x - 1 \leq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_2 (x - 1) = 0 \end{array}$$



最適なKKT点

$$(x^*, \mu_1, \mu_2) = (1, 0, 2)$$

最適値は -1

ラグランジュ関数

$$L(x, \mu_1, \mu_2) = -x^2 - \mu_1 x + \mu_2 (x - 1)$$

ラグランジュ双対問題の目的関数

$$\omega_0(\mu_1, \mu_2) = \inf_x L(x, \mu_1, \mu_2) = -\infty$$



$$\text{opt}(\mathbf{D}) = -\infty$$

拡張ラグランジュ関数

$$L_c(x, \mu_1, \mu_2) = -x^2 + \frac{1}{2c} \left\{ \max\{0, \mu_1 - cx\}^2 - \mu_1^2 + \max\{0, \mu_2 + c(x-1)\}^2 - \mu_2^2 \right\}$$

$$= \begin{cases} -x^2 - \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2c} & \text{if } \mu_1 - cx \leq 0, \mu_2 + cx - c \leq 0 \\ \left(\frac{c}{2} - 1\right)x^2 - \mu_1 x - \frac{\mu_2^2}{2c} & \text{if } \mu_1 - cx > 0, \mu_2 + cx - c \leq 0 \\ \left(\frac{c}{2} - 1\right)x^2 + (\mu_2 - c)x + \frac{c}{2} - \mu_2 - \frac{\mu_1^2}{2c} & \text{if } \mu_1 - cx \leq 0, \mu_2 + cx - c > 0 \\ (c-1)x^2 - (c + \mu_1 - \mu_2)x + \frac{c}{2} - \mu_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 2, \ c > 2 \text{ のとき}$$

$$L_1(x, 0, 2) = \begin{cases} -x^2 - \frac{2}{c} & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{c-2}{c} \\ \left(\frac{c}{2} - 1\right)x^2 - \frac{2}{c} & \text{if } x < 0 \\ \left(\frac{c}{2} - 1\right)x^2 + (2-c)x + \frac{c}{2} - 2 & \text{if } x \geq \frac{c-2}{c} \end{cases}$$

$$\min \left\{ -x^2 - \frac{2}{c} \middle| 0 \leq x \leq \frac{c-1}{c} \right\} = -\left(\frac{c-2}{c} \right)^2 - \frac{2}{c} = -1 + \frac{4}{c} - \frac{4}{c^2} - \frac{2}{c} = -1 + \frac{2}{c} \left(1 - \frac{2}{c^2} \right) > -1$$

$$\min \left\{ \left(\frac{c}{2} - 1 \right) x^2 - \frac{2}{c} \middle| x \leq 0 \right\} = -\frac{2}{c} > -1$$

$$\min \left\{ \left(\frac{c}{2} - 1 \right) x^2 + (2-c)x + \frac{c}{2} - 2 \middle| x \geq \frac{c-1}{c} \right\} = \left(\frac{c}{2} - 1 \right) + 2 - c + \frac{c}{2} - 2 = -1$$

よ り $\omega_c(0,2) = -1$

つまり, $\text{opt}(\mathbf{P}) = \text{opt}(\mathbf{D}_c) > \text{opt}(\mathbf{D})$

なんかすごそうな定理

R. T. Rockafellar, Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming, SIAM Journal on Control, Vol. 12, pp. 268-285, 1974.

(福島先生の「非線形最適化の基礎」の定理4.14)

最適解が唯一で，2次の十分条件を満たす．

任意の α, u に対して集合 $\{x | f(x) \leq \alpha, g_j(x) \leq u_j, (j=1, \dots, r)\}$ はコンパクト．

$\bar{c}$ が存在して，任意の $c \geq \bar{c}$ に対してペナルティ関数： $f(x) + c \sum_{j=1}^r \max\{0, g_j(x)\}$ は下に有界．

このとき， $\text{opt}(P) = \text{opt}(D_c)$



一般に非凸な問題に対して $\omega_c(\lambda, \mu)$ は計算できないので，
絵に描いた餅であることに注意！！



アウトライン

1. ラグランジュ双対問題

- 性質
- 解釈

2. 陽に書けるラグランジュ双対問題

- Fenchel双対問題
- Gauge双対問題

3. 双対ギャップが小さい双対問題

- 拡張ラグランジュ関数による双対問題
- **多項式最適化問題のSOS緩和による双対問題**
- 代理双対問題

多項式最適化問題に対するSOSを使った双対問題

多項式最適化問題：

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, r$$

f, g_j は多項式関数.

SOS(sum of squares)

2乗和多項式とは有限個の多項式 p_i の2乗和で表される関数.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i(x)^2$$

2乗和多項式の集合を Σ , 次数が r 以下の2乗和多項式の集合を Σ_r とする.

ラグランジュ乗数を x の関数 $\mu(x)$ とした双対問題

小島政和, 多項式最適化問題と双対性, 第1 回横幹連合コンファレンス, 2005 年11 .

https://www.jstage.jst.go.jp/article/oukan/2005/0/2005_0_53/_pdf

2ページで直観的にわかりやすい

もし, $\mu_j(x) = \begin{cases} 0 & g_j(x) \leq 0 \text{ のとき} \\ +\infty & \text{そうでないとき} \end{cases}$ とおけたら,

$$L(x, \mu(x)) = f(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j(x) g_j(x) = \begin{cases} f(x) & x \text{ が実行可能なとき} \\ +\infty & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

となり, $\inf_x L(x, \mu(x)) = \text{opt(P)}$

つまり関数を変数とした双対問題は双対ギャップが0になる.

任意の関数を変数にした最適化問題は扱えないので,
絵に描いた餅であることに注意!!

任意の非負関数の集合からSOSの集合へ

関数が満たして欲しい条件

- ・ 非負関数になること.

⇒ 弱双対性が成り立つ

実際, x が実行可能解であれば

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j(x) g_j(x) \geq \inf_x L(x, \mu(x))$$

非負の関数って？ 2乗和多項式は非負の関数！！

一般化ラグランジュ双対問題

$$\begin{aligned} (\text{GD}_q) \quad & \max \min_x L(x, \mu(x)) \\ \text{s.t.} \quad & \mu \in \Sigma_q \end{aligned}$$

ここで,

$$\text{opt}(\text{P}) \geq \text{opt}(\text{GD}_q) \geq \text{opt}(\text{D})$$

これも絵にかいた
餅じゃないの？



SDPへの変換にむけて

$$\begin{aligned} (\text{GD}_q) \quad & \max \min_x L(x, \mu(x)) \\ \text{s.t.} \quad & \mu \in \Sigma_q \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \max \eta \\ \text{s.t.} \quad & L(\mathbf{x}, \mu(\mathbf{x})) - \eta \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \\ & \mu \in \Sigma_q \end{aligned}$$

半無限計画

$L(x, \mu(x)) - \eta$ は多項式関数であり,

$$L(x, \mu(x)) - \eta \in \Sigma_q \Rightarrow L(x, \mu(x)) - \eta \geq 0 \quad \forall x$$

が成り立つ. そこで次の問題を考える.

$$\begin{aligned} (\underline{\text{GD}}_q) \quad & \max \eta \\ \text{s.t.} \quad & L(x, \mu(x)) - \eta \in \Sigma_q \\ & \mu \in \Sigma_q \end{aligned}$$

問題($\underline{\text{GD}}_q$)の性質

$$\begin{aligned} (\underline{\text{GD}}_q) \max \quad & \eta \\ \text{s.t.} \quad & L(x, \mu(x)) - \eta \in \Sigma_q \\ & \mu \in \Sigma_q \end{aligned}$$

- 弱双対性になりたつ.

$$\text{opt}(\text{P}) \geq \text{opt}(\text{GD}_q) \geq \text{opt}(\underline{\text{GD}}_q) \geq \text{opt}(\text{D})$$

- SDPとして表せる.
- 適当な仮定のもと, 十分大きい q に対して $\text{opt}(\text{P}) = \text{opt}(\underline{\text{GD}}_q)$
- $(\underline{\text{GD}}_q)$ の双対問題はLasserre のSDP緩和
J. B. Lasserre, Global optimization with polynomials and the problems of moments, SIAM J. Optim., 11, pp.796-817 (2001).

アウトライン

1. ラグランジュ双対問題

- 性質
- 解釈

2. 陽に書けるラグランジュ双対問題

- Fenchel双対問題
- Gauge双対問題

3. 双対ギャップが小さい双対問題

- 拡張ラグランジュ関数による双対問題
- 多項式最適化問題のSOS緩和による双対問題
- 代理双対問題

代理双対問題(surrogate dual)

Glover, F.: A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem. *Oper. Res.* **13**(6), 879–919 (1965).

Müller, B., Muñoz, G., Gasse, M. *et al.* On generalized surrogate duality in mixed-integer nonlinear programming. *Math. Program.* **192**, 89–118 (2022).

考える問題

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, r$$

$$x \in X$$

緩和問題

任意の $\lambda \in R_+^r$ に対して

$$g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, r \Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(x) \leq 0$$

よって，次の問題は緩和問題になる．

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(x) \leq 0$$

$$x \in X$$

代理双対問題

$$\begin{aligned} D_S : \max \quad & \omega_S(\lambda) \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \in R_+^r \end{aligned}$$

$$\omega_S(\lambda) = \min \left\{ f(x) \mid x \in X, \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(x) \leq 0 \right\}$$

定義より, $\text{opt}(P) \geq \text{opt}(D_S)$

$$\begin{aligned} \text{また, } \omega_S(\lambda) &= \min \left\{ f(x) \mid x \in X, \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(x) \leq 0 \right\} \\ &\geq \min \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(x) \mid x \in X, \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(x) \leq 0 \right\} \\ &\geq \min \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^r \lambda_j g_j(x) \mid x \in X \right\} = \omega(\lambda) \end{aligned}$$

より $\text{opt}(D_S) \geq \text{opt}(D)$

代理双対問題の性質

- 実行可能集合を有界にできる.

$$D_S : \max \omega_S(\lambda)$$

$$\text{s.t. } \lambda \in R_+^r, \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$$

- $-\omega_S$ は準凸関数(quasi-convex)
- 代理双対問題解くアルゴリズムが存在.
ただし, 緩和問題が解けることが前提

Example 1 in [Müller, et al., 2022]

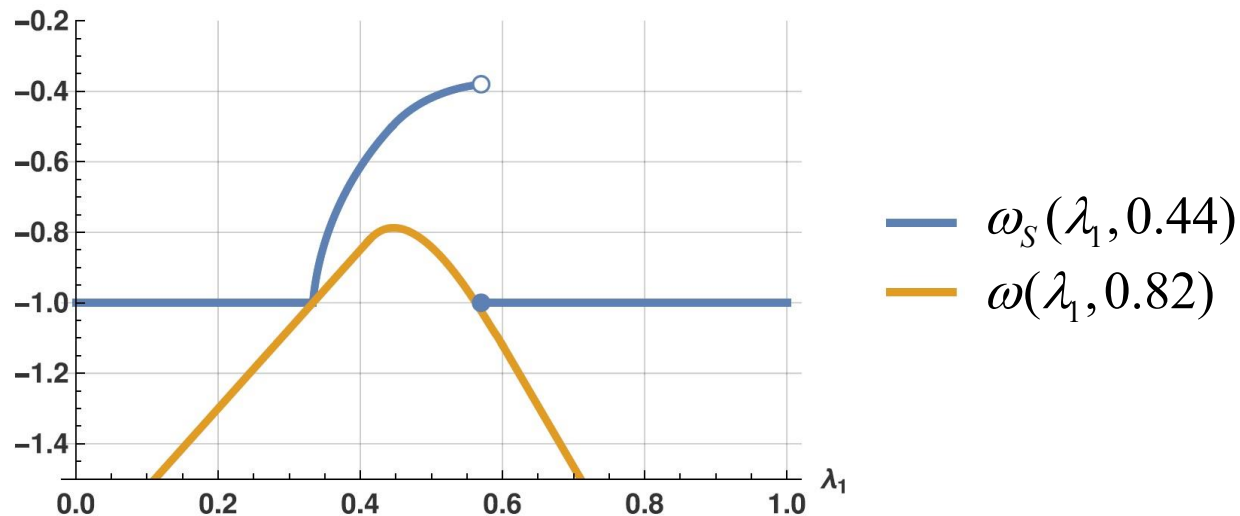
$$\min -y$$

$$\text{s.t. } g_1(x, y) := 2xy + x^2 - y^2 - x \leq 0$$

$$g_2(x, y) := -xy - 0.3x^2 - 0.2y^2 - 0.5x + 1.5y \leq 0$$

$$(x, y) \in X := [0, 1]^2$$

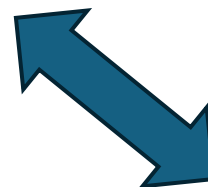
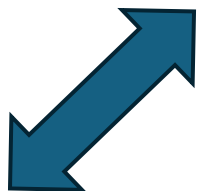
最適解 : $(x^*, y^*) \approx (0.52, 0.37)$ 最適値 : -0.37





組み合わせるとよいことある？

拡張ラグランジュ関数による双対問題



多項式最適化問題に対する
SOSを用いた双対問題



代理双対問題