

なぜ双対性？

京都大学大学院情報学研究科

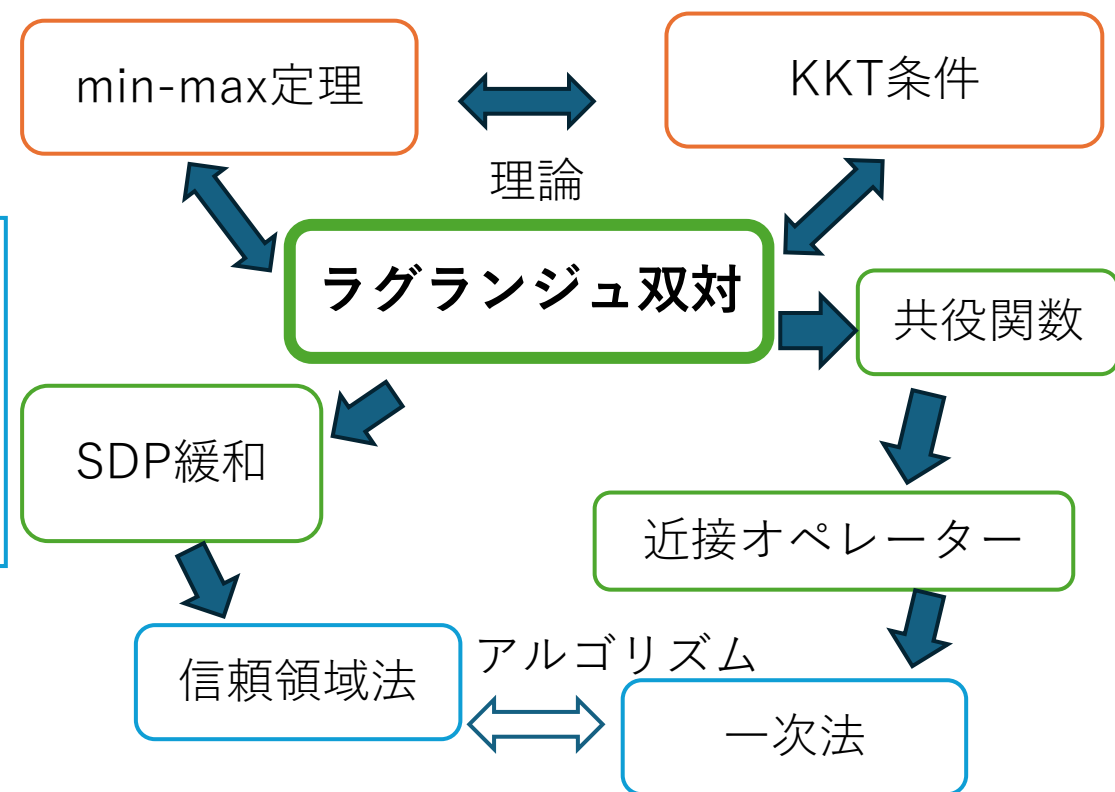
山下信雄

本講義の目標

- ✗ 双対理論をマスターする.
- 双対問題を介して，連続最適化の研究を俯瞰できるようになる.

演習問題 1

双対問題のマインドマップを書こう.
自分の研究テーマも入れてみよう.



双対って何？

分野によって違うので，一言では定義できません．

気になる方は以下の室田先生のサーベイ論文を読んでください．

室田一雄，「双対原理から双対技術へ」，横幹，1巻1号，p.36-42，2007.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/trafst/1/1/1_36/_article/-char/ja/

キーワード：双対，共役，随伴，・・・

連続最適化によく現れる「双対」

- **双対問題**(dual problem)

weak and strong duality, conjugate function, duality gap

- **双対錐**(dual cone)

symmetric cone, etc.

- **双対ノルム**(dual norm)

$$\|y\|^d = \sup \{ \langle y, x \rangle \mid \|x\| \leq 1 \}$$

- **双対空間**(dual space)

mirror descent method, dual averaging method.

双対問題とは

主問題

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r \\ & x \in X \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \omega(\lambda, \mu) \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \in R^m \\ & \mu_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

元の問題(主問題)を鏡で映したようなもの.

主問題

最小化

$\Leftrightarrow$

決定変数の数

$\Leftrightarrow$

制約条件の数

$\Leftrightarrow$

双対問題

最大化

制約条件の数

決定変数の数

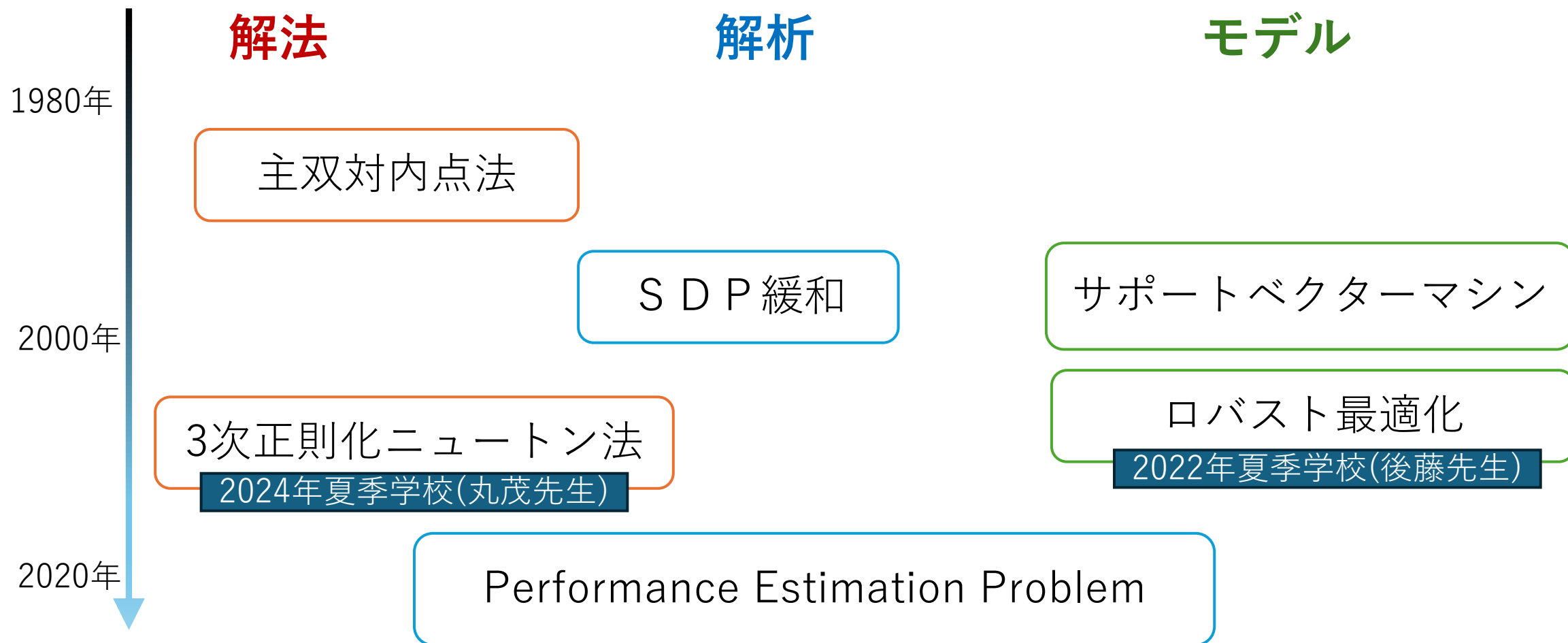
双対問題の望ましい性質

- (弱)双対性：それぞれの実行可能解 x , (λ, μ) に対して

$$f(x) \geq \omega(\lambda, \mu)$$

- (適当な仮定の下)双対問題の双対問題は主問題になる.
- **計算できる**
- 主問題の最適値と双対問題の最適値の差(双対ギャップ)が小さい

双対性に関連した連続最適化の研究トピック



双対性を使った研究の良いところ

一般的なイメージ



双対理論はきれいで美しい.
でも双対理論は難しい



双対性を使った研究はすごい



双対性を使った研究に対する
評価は高い(reject しにくい)



ヒットを打ちやすい.
特大ホームランもでる？

実際

- 式変形だけなら簡単
- 応用問題毎にハンドメイド. 泥臭い.



応用問題は無数にある.
既存の理論を使うだけなら
難しくない.