

演習問題

演習問題 1

双対問題のマインドマップを書いてみよう。
自分の研究テーマも入れてみよう。

演習問題 2

閉真凸関数 f の近接写像(proximal operator):

$$\text{Prox}_f(y) = \arg \min_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right\}$$

(1) $\min \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right\}$ のFenchel双対問題を求めよ.

(2) (1)の問題とそのFenchel双対問題に対して強双対性が成り立つとき,
以下の式(Moreau decomposition)が成り立つことを示せ

$$\text{Prox}_f(y) + \text{Prox}_{f^*}(y) = y$$

演習問題 3

次の凸 2 次最適化問題(凸多面体への射影)を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & a_i^\top x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ここで, 決定変数は $x \in R^n$ であり, $y, a_1, \dots, a_m \in R^n$ は定数ベクトル, $b_1, \dots, b_m \in R$ は正の定数である.

この問題のFenchel双対問題に対する近接勾配法を与えよ.
さらに, そこ近接勾配法が並列計算できるか検討せよ.

演習問題 3 の補足：近接勾配法

次の制約なし凸最適化問題を考える.

$$\min f(x) + g(x)$$

ただし, f, g は凸関数であり, f は微分可能で ∇f は係数 L のリプシッツ連続な関数である.

近接勾配法(Proximal Gradient Method) :

$$x^{k+1} = \text{Prox}_{\frac{1}{L}g} \left(x^k - \frac{1}{L} \nabla f(x^k) \right)$$