

# 演習問題の解答例

# 演習問題 1

みなさんが書いたものが正解です.

# 演習問題 2 (1)の解答例 by清田さん(東大),田中さん(統数研)

$$g(x) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} g^*(u) &= \sup \left\{ \langle u, x \rangle - \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \right\} \\ &= \sup \left\{ \langle u + y, x \rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 \right\} - \frac{1}{2}\|y\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u + y\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 \end{aligned}$$

より,

$$\max -f^*(u) - \frac{1}{2}\|u - y\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

## 演習問題 2 (2) の解答例 by 田中さん(統数研)

強双対性が成り立つことから,

$$\begin{aligned} 0 &= \min \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right\} - \max \left\{ -f^*(u) - \frac{1}{2} \|u - y\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2 \right\} \\ &= \min \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right\} + \min \left\{ f^*(u) + \frac{1}{2} \|u - y\|^2 \right\} - \frac{1}{2} \|y\|^2 \\ &= f(\text{Prox}_f(y)) + \frac{1}{2} \|\text{Prox}_f(y) - y\|^2 + f^*(\text{Prox}_{f^*}(y)) + \frac{1}{2} \|\text{Prox}_{f^*}(y) - y\|^2 - \frac{1}{2} \|y\|^2 \\ &= f(\text{Prox}_f(y)) + f(\text{Prox}_{f^*}(y)) + \frac{1}{2} \|\text{Prox}_f(y) + \text{Prox}_{f^*}(y) - y\|^2 - \langle \text{Prox}_f(y), \text{Prox}_{f^*}(y) \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} \|\text{Prox}_f(y) + \text{Prox}_{f^*}(y) - y\|^2 \end{aligned}$$

# 演習問題 2 (2) の解答例 by 清田さん(東大)

$$u = \text{Prox}_f(y) \Leftrightarrow y - u \in \partial f(u)$$

$\min f(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$   
の最適性の条件  
 $0 \in \partial f(u) + u - y$

$$x \in \partial f(y) \Leftrightarrow y \in \partial f^*(x)$$

$$\Leftrightarrow u \in \partial f^*(y - u)$$

$$\Leftrightarrow y - u = \text{Prox}_{f^*}(y)$$

$0 \in \partial f^*(y - u) + (y - u) - y$   
と  
 $\min f^*(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$   
の最適性の条件  
 $0 \in \partial f^*(\text{Prox}_{f^*}(y)) + (\text{Prox}_{f^*}(y)) - y$

$$\Rightarrow y - \text{Prox}_f(y) = \text{Prox}_{f^*}(y)$$

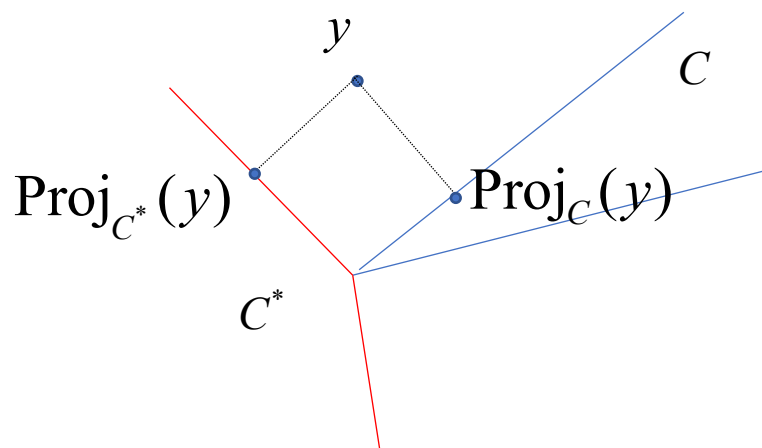
# Moreau decompositionの例

$f$  を錐  $C$  の標示関数とする.

このとき共役関数  $f^*$  は極錐  $C^*$  の標示関数になる.

集合の標示関数の近接オペレータはその集合の射影になるから

$$y = \text{Proj}_C(y) + \text{Proj}_{C^*}(y)$$



# 演習問題 3 の解答例 by 牛山さん(東大)

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad g(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z_i \leq b_i, i = 1, \dots, m \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると,  $\min f(x) + g(Ax)$  と書ける. ここで,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)^\top$

$$f^*(u) = \frac{1}{2} \|u + y\|^2 - \frac{1}{2} \|y\|^2,$$

$$g^*(v) = \sup \{ \langle v, z \rangle - g(z) \} = \sum_{i=1}^m \sup \{ v_i z_i \mid z_i \leq b_i \} = \begin{cases} \langle b, v \rangle & \text{if } v_i \geq 0, i = 1, \dots, m \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

よって, Fenchel双対(の最小化問題バージョン)は

$$\begin{array}{ll} \min \frac{1}{2} \|A^\top \lambda + y\|^2 - \langle b, \lambda \rangle & \longrightarrow \min \frac{1}{2} \|A^\top \bar{\lambda} - y\|^2 + \langle b, \bar{\lambda} \rangle \\ \text{s.t. } \lambda \leq 0 & \text{s.t. } \bar{\lambda} \geq 0 \end{array}$$

# 演習問題 3 の解答例    by 柳下さん(統数研)

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad g(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z_i \geq 0, i = 1, \dots, m \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると,

$$\min f(x) + g(s)$$

$$\text{s.t. } Ax + s = b$$

と書ける. ここで,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)^\top$

$$f^*(u) = \frac{1}{2} \|u + y\|^2 - \frac{1}{2} \|y\|^2, \quad g^*(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v_i \leq 0, i = 1, \dots, m \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

よって, Fenchel双対(の最小化問題バージョン)は

$$\min \frac{1}{2} \|A^\top \lambda - y\|^2 + \langle b, \lambda \rangle$$

$$\text{s.t. } \lambda \geq 0$$



# 近接勾配法

Fenchel双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|A^\top \lambda - y\|^2 + \langle b, \lambda \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

の近接勾配法は射影勾配法となる.

# 並列計算について

勾配  $g^k = AA^\top \lambda^k - Ay + b$  をGPUなどで並列計算する.

射影  $\lambda_i^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda_i^k - \frac{1}{L} g_i^k \right\}, i = 1, \dots, m$  は並列計算可能.

# 演習問題 3 の補足

並列での解き方はいろいろある。

例：飯塚先生の非拡大写像の不動点アルゴリズム

今回のものの参考文献：

Fukushima, M., Haddou, M., Van Nguyen, H. *et al.* A parallel descent algorithm for convex programming. *Comput Optim Applic* **5**, 5–37 (1996).

# アルゴリズムの工夫

- $AA^\top$  の性質がよくなるように前処理する。  
特に  $J^k = \{j | \lambda_j^k > 0\}$  としたとき,  $A_{J^k} A_{J^k}^\top$  の条件数が1に近ければ収束が速くなることが期待できる。  
(  $a_i^\top x \leq b_i$  を  $\tau_i a_i^\top x \leq \tau_i b_i$  ( $\tau_i$  は正の定数) と変換するなど)
- 双対問題の近似解から有効制約を同定し、そのあと2次の方法で解く