連続最適化のための進化戦略の数理演習課題

秋本洋平 (筑波大学 / 理研 AIP / 大阪大学)

2025 年 8 月 28–30 日　統計数理研究所
連続最適化および関連分野に関する夏期学校 2025

問 1　Truncated Additive Drift の証明

講演資料に示した Truncated Additive Drift の定理を証明する．証明したい命題は以下の通りである．

命題　Let $\{(X_t, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ be an integrable adapted process in $\mathbb{R}$ and $X_0 = \beta_0$. For $\beta < \beta_0$, let $T_\beta^X = \inf\{t : X_t \leqslant \beta\}$ be the first hitting time of the set $(-\infty, \beta]$. If there exist $A \geqslant B > 0$ such that

$$\mathbb{E}\left[\max\{X_{t+1} - X_t, -A\}\,\mathbb{I}\{T_\beta^X > t\} \mid \mathcal{F}_t\right] \leqslant -B\mathbb{I}\{T_\beta^X > t\}\ , \tag{1.1}$$

then the expectation of T_β^X satisfies

$$\mathbb{E}\left[T_\beta^X\right] \leqslant \frac{A + \beta_0 - \beta}{B}\ . \tag{1.2}$$

(1)　以下のように確率過程 $\{Y_t : t \geqslant 0\}$ を定義する：$Y_0 = X_0$ および

$$Y_{t+1} = Y_t + \max\{X_{t+1} - X_t, -A\}\mathbb{I}\{T_\beta^X > t\} - B\mathbb{I}\{T_\beta^X \leqslant t\}\ . \tag{1.3}$$

このとき，任意の $t \geqslant 0$ について $\mathbb{E}[|Y_t|] < \infty$ となることを，$\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ と数学的帰納法により示せ．

(2)　$T_\beta^Y = \inf\{t : Y_t \leqslant \beta\}$ は $T_\beta^X \leqslant T_\beta^Y$ を満たすことを示せ．

(3)　$\{Y_t\}$ についてのストッププロセスを $\bar{Y}_t = Y_{\min\{t, T_\beta^Y\}}$ と定義する．このとき，

$$\mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \leqslant \bar{Y}_t - B\mathbb{I}\{T_\beta^Y > t\} \tag{1.4}$$

が任意の t について成立することを示せ．

(4)　下に有界な場合の加法的ドリフト解析の証明を参考に，以下を証明せよ：

$$\mathbb{E}\left[T_\beta^X\right] \leqslant \frac{A + \beta_0 - \beta}{B}\ . \tag{1.5}$$

問 2　Hit-and-Run アルゴリズムのドリフト下限の導出

講義資料では Spherical 関数において，Hit-and-Run アルゴリズムが (1+1)-ES のドリフトの下界を与えることを示した．ここでは，任意の関数において，Hit-and-Run アルゴリズムがドリフトの下界（その結果 EFHT の下界）を与えることを確認する．

(1)　確率過程 $X_t = \log\|m_t - x^*\|$ に対して，確率過程 Y_t を以下のように定義する：$Y_0 = X_0$ かつ

$$Y_{t+1} = Y_t + \min\{X_{t+1} - X_t, 0\}\ . \tag{2.1}$$

このとき，$\{Y_t\}$ は単調非増加系列であり，$T_\beta^X \geqslant T_\beta^Y$ となることを示せ．

(2)　確率過程 Y_t のドリフトについて

$$\mathbb{E}[Y_{t+1} - Y_t \mid \mathcal{F}_t] \geqslant \mathbb{E}\left[\log\frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|}\mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\} \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{2.2}$$

が成立することを示せ．

(3)　Hit-and-Run アルゴリズム（各ステップにおいて $z_t \sim \mathcal{N}(0, I)$ をサンプルし，$\sigma_t^* = \mathrm{argmin}_{\sigma \geqslant 0} \|m_t + \sigma z_t - x^*\|$ を後付けで計算し，$x_t^* = m_t + \sigma_t^* z_t$ とするアルゴリズム）を考えることで，

$$\log \frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\} \geqslant \log \frac{\|x_t^* - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} = \log(\sin(\theta_t)) \mathbb{I}\{\theta_t \leqslant \pi/2\} \tag{2.3}$$

となることを示せ．ここで，$\theta_t \in [0, \pi)$ は z_t と $x^* - m_t$ の間の角度を表すものとする．

(4)　$d \geqslant 2$ のとき $\mathbb{E}[\log(\sin(\theta_t))\mathbb{I}\{\theta_t \leqslant \pi/2\} \mid \mathcal{F}_t] \geqslant -1/d$ となる事実を用いて，$d \geqslant 2$ の場合の $\mathbb{E}[T_\beta^X]$ の下界を求めよ．

問 3　強凸かつリプシッツ平滑な関数が Assumption 1 を満たすことの確認

目的関数 $f(x) = g(h(x))$ が以下の性質を満たすとする：$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は狭義単調増加関数，$h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は連続的一階微分可能であり，任意の $z, \Delta \in \mathbb{R}^d$ について

$$\frac{L_\ell}{2} \|\Delta\|^2 \leqslant h(z + \Delta) - h(z) - \Delta^\top \nabla h(z) \leqslant \frac{L_u}{2} \|\Delta\|^2 \ . \tag{3.1}$$

このとき，Assumption 1 を $C_\ell = \frac{1}{V_d}\sqrt{\frac{L_\ell}{L_u}}$，$C_u = \frac{1}{V_d}\sqrt{\frac{L_u}{L_\ell}}$ について満たすことを示せ．ここで，$V_d = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^{1/d}(d/2+1)}$ は d 次元単位超球の体積の d 乗根を表す．

問 4　Assumption 1 のもとで成功確率がバウンドされることの証明

Assumption 1 を仮定すると成功確率のバウンドが得られ，これが (1+1)-ES の一次収束の証明上重要な役割を果たす．ここでは，Assumption 1 のもとで成功確率のバウンドを導出する．

(1)　成功確率が以下を満たすことを示せ：

$$p_0^{\mathrm{succ}}(\bar{\sigma}; m) \leqslant \Phi\left(\bar{\mathcal{B}}\left(0, \frac{C_u}{\bar{\sigma}}\right); 0, \mathrm{I}\right) \ . \tag{4.1}$$

ここで，$\Phi(\cdot; 0, I)$ は多変量標準正規分布のもとでの確率測度を表す．

(2)　成功確率が以下を満たすことを示せ：

$$p_0^{\mathrm{succ}}(\bar{\sigma}; m) \geqslant \Phi\left(\bar{\mathcal{B}}\left(\left(\frac{(2C_u - C_\ell)}{\bar{\sigma}}\right) e_1, \frac{C_\ell}{\bar{\sigma}}\right); 0, \mathrm{I}\right) \ . \tag{4.2}$$