連続最適化のための進化戦略の数理演習課題（解説）

秋本洋平 (筑波大学 / 理研 AIP / 大阪大学)

2025 年 8 月 28–30 日　統計数理研究所
連続最適化および関連分野に関する夏期学校 2025

問 1　Truncated Additive Drift の証明

講演資料に示した Truncated Additive Drift の定理を証明する．証明したい命題は以下の通りである．

命題　Let $\{(X_t, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ be an integrable adapted process in $\mathbb{R}$ and $X_0 = \beta_0$. For $\beta < \beta_0$, let $T_\beta^X = \inf\{t : X_t \leqslant \beta\}$ be the first hitting time of the set $(-\infty, \beta]$. If there exist $A \geqslant B > 0$ such that

$$\mathbb{E}\left[\max\{X_{t+1} - X_t, -A\}\mathbb{I}\{T_\beta^X > t\} \mid \mathcal{F}_t\right] \leqslant -B\mathbb{I}\{T_\beta^X > t\} \ , \tag{1.1}$$

then the expectation of T_β^X satisfies

$$\mathbb{E}\left[T_\beta^X\right] \leqslant \frac{A + \beta_0 - \beta}{B} \ . \tag{1.2}$$

(1)　以下のように確率過程 $\{Y_t : t \geqslant 0\}$ を定義する：$Y_0 = X_0$ および

$$Y_{t+1} = Y_t + \max\{X_{t+1} - X_t, -A\}\mathbb{I}\{T_\beta^X > t\} - B\mathbb{I}\{T_\beta^X \leqslant t\} \ . \tag{1.3}$$

このとき，任意の $t \geqslant 0$ について $\mathbb{E}[|Y_t|] < \infty$ となることを，$\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ と数学的帰納法により示せ．

(2)　$T_\beta^Y = \inf\{t : Y_t \leqslant \beta\}$ は $T_\beta^X \leqslant T_\beta^Y$ を満たすことを示せ．

(3)　$\{Y_t\}$ についてのストッププロセスを $\bar{Y}_t = Y_{\min\{t, T_\beta^Y\}}$ と定義する．このとき，

$$\mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \leqslant \bar{Y}_t - B\mathbb{I}\{T_\beta^Y > t\} \tag{1.4}$$

が任意の t について成立することを示せ．

(4)　下に有界な場合の加法的ドリフト解析の証明を参考に，以下を証明せよ：

$$\mathbb{E}\left[T_\beta^X\right] \leqslant \frac{A + \beta_0 - \beta}{B} \ . \tag{1.5}$$

(1) **の解説**　$t = 0$ のとき，$\mathbb{E}[|Y_0|] = \mathbb{E}[|X_0|] < \infty$ より成立．$t \geqslant 0$ について $\mathbb{E}[|Y_t|] < \infty$ が成立するならば，

$$\begin{aligned} |Y_{t+1}| &= |Y_t + \max\{X_{t+1} - X_t, -A\}\mathbb{I}\{T_\beta^X > t\} - B\mathbb{I}\{T_\beta^X \leqslant t\}| && (1.6)\\ &\leqslant |Y_t| + |X_{t+1}| + |X_t| + A + B && (1.7)\end{aligned}$$

より，期待値をとれば

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_{t+1}|] &\leqslant \mathbb{E}[|Y_t|] + \mathbb{E}[|X_{t+1}|] + \mathbb{E}[|X_t|] + A + B && (1.8)\\ &< \infty && (1.9)\end{aligned}$$

が得られ，$\mathbb{E}[|Y_{t+1}|] < \infty$ についても命題成立．数学的帰納法により題意成立．

(2) **の解説**　Y_t の定義から，$t < T_\beta^X$ について，$X_t \leqslant Y_t$ が得られる．すなわち，$t < T_\beta^X \implies \beta < X_t \leqslant Y_t \implies t < T_\beta^Y$．したがって，$T_\beta^X \leqslant T_\beta^Y$．

(3) **の解説**　$\mathbb{I}\{T^Y_\beta \leqslant t\} + \mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} = 1$ であることから，

$$\mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1}\mathbb{I}\{T^Y_\beta \leqslant t\} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1}\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} \mid \mathcal{F}_t] \tag{1.10}$$

が得られる．ここで，$\bar{Y}$ はストッププロセスであることから，

$$\mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1}\mathbb{I}\{T^Y_\beta \leqslant t\} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\bar{Y}_t\mathbb{I}\{T^Y_\beta \leqslant t\} \mid \mathcal{F}_t] = \bar{Y}_t\mathbb{I}\{T^Y_\beta \leqslant t\} \tag{1.11}$$

が得られる．また，(1.1)と(1.3)より，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1}\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} \mid \mathcal{F}_t] && (1.12)\\
&\quad = \mathbb{E}[Y_{t+1}\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} \mid \mathcal{F}_t] && (1.13)\\
&\quad = \mathbb{E}[Y_t\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} + \max\left\{X_{t+1} - X_t, -A\right\}\mathbb{I}\{T^X_\beta > t\}\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} - B\mathbb{I}\{T^X_\beta \leqslant t\}\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} \mid \mathcal{F}_t] && (1.14)\\
&\quad = Y_t\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} + \mathbb{E}[\max\left\{X_{t+1} - X_t, -A\right\}\mathbb{I}\{T^X_\beta > t\} \mid \mathcal{F}_t]\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} - B\mathbb{I}\{T^X_\beta \leqslant t\}\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} && (1.15)\\
&\quad \leqslant (Y_t - B\mathbb{I}\{T^X_\beta > t\} - B\mathbb{I}\{T^X_\beta \leqslant t\})\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} && (1.16)\\
&\quad = (Y_t - B)\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} && (1.17)\\
&\quad = (\bar{Y}_t - B)\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} \ . && (1.18)
\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] &\leqslant \bar{Y}_t\mathbb{I}\{T^Y_\beta \leqslant t\} + (\bar{Y}_t - B)\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} && (1.19)\\
&= \bar{Y}_t - B\mathbb{I}\{T^Y_\beta > t\} \ . && (1.20)
\end{aligned}$$

(4) **の解説**　(1.4)の両辺について期待値をとれば，$\mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1}] \leqslant \mathbb{E}[\bar{Y}_t] - B\Pr[T^Y_\beta > t]$ が得られる．T^Y_β は非負の整数に値をとる確率変数であるため，$\mathbb{E}[T^Y_\beta] = \sum_{t=0}^{+\infty}\Pr[T^Y_\beta > t]$ と表すことができる．このとき，

$$B\mathbb{E}\left[T^Y_\beta\right] \xleftarrow{\tilde{t}\to\infty} \sum_{t=0}^{\tilde{t}} B\Pr\left[T^Y_\beta > t\right] \leqslant \sum_{t=0}^{\tilde{t}}\left(\mathbb{E}[\bar{Y}_t] - \mathbb{E}[\bar{Y}_{t+1}]\right) = \mathbb{E}[\bar{Y}_0] - \mathbb{E}[\bar{Y}_{\tilde{t}}] \tag{1.21}$$

が得られる．ここで，$Y_{t+1} \geqslant Y_t - A$ であることから，$Y_{T^Y_\beta} \geqslant \beta - A$ である．$\bar{Y}_{\tilde{t}} \geqslant Y_{T^Y_\beta}$ であることから，$E[\bar{Y}_{\tilde{t}}] \geqslant \beta - A$ が得られる．したがって，$\mathbb{E}[\bar{Y}_0] = \beta_0$ より，

$$\mathbb{E}\left[T^Y_\beta\right] \leqslant (A/B) + B^{-1}(\beta_0 - \beta) \ . \tag{1.22}$$

$\mathbb{E}[T^X_\beta] \leqslant \mathbb{E}[T^Y_\beta]$ であることから，題意成立．

問 2　Hit-and-Run アルゴリズムのドリフト下限の導出

講義資料では Spherical 関数において，Hit-and-Run アルゴリズムが (1+1)-ES のドリフトの下界を与えることを示した．ここでは，任意の関数において，Hit-and-Run アルゴリズムがドリフトの下界（その結果 EFHT の下界）を与えることを確認する．

(1)　確率過程 $X_t = \log\|m_t - x^*\|$ に対して，確率過程 Y_t を以下のように定義する：$Y_0 = X_0$ かつ

$$Y_{t+1} = Y_t + \min\{X_{t+1} - X_t, 0\} \ . \tag{2.1}$$

このとき，$\{Y_t\}$ は単調非増加系列であり，$T^X_\beta \geqslant T^Y_\beta$ となることを示せ．

(2)　確率過程 Y_t のドリフトについて

$$\mathbb{E}[Y_{t+1} - Y_t \mid \mathcal{F}_t] \geqslant \mathbb{E}\left[\log\frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|}\mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\} \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{2.2}$$

が成立することを示せ．

(3)　Hit-and-Run アルゴリズム（各ステップにおいて $z_t \sim \mathcal{N}(0, I)$ をサンプルし，$\sigma_t^* = \mathrm{argmin}_{\sigma \geqslant 0} \|m_t + \sigma z_t - x^*\|$ を後付けで計算し，$x_t^* = m_t + \sigma_t^* z_t$ とするアルゴリズム）を考えることで，

$$\log \frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\} \geqslant \log \frac{\|x_t^* - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} = \log(\sin(\theta_t)) \mathbb{I}\{\theta_t \leqslant \pi/2\} \tag{2.3}$$

となることを示せ．ここで，$\theta_t \in [0, \pi)$ は z_t と $x^* - m_t$ の間の角度を表すものとする．

(4)　$d \geqslant 2$ のとき $\mathbb{E}[\log(\sin(\theta_t))\mathbb{I}\{\theta_t \leqslant \pi/2\} \mid \mathcal{F}_t] \geqslant -1/d$ となる事実を用いて，$d \geqslant 2$ の場合の $\mathbb{E}[T_\beta^X]$ の下界を求めよ．

(1) **の解説**　（単調非増加）定義より，$Y_{t+1} \leqslant Y_t$．
（$T_\beta^X \geqslant T_\beta^Y$）$t = 0$ のとき，$Y_0 \leqslant X_0$ であり，$Y_t \leqslant X_t$ が成立するならば，

$$\begin{aligned}
Y_{t+1} &= Y_t + \min\{X_{t+1} - X_t, 0\} && (2.4)\\
&\leqslant Y_t + X_{t+1} - X_t && (2.5)\\
&\leqslant X_t + X_{t+1} - X_t && (2.6)\\
&= X_{t+1} \ . && (2.7)
\end{aligned}$$

数学的帰納法により，$Y_t \leqslant X_t$ が任意の t で成立．したがって，$Y_t > \beta \implies X_t > \beta$ なので，$T_\beta^X \geqslant T_\beta^Y$ が成立．

(2) **の解説**　定義より，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{t+1} - Y_t \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[X_{t+1} - X_t, 0\} \mid \mathcal{F}_t] && (2.8)\\
&= \mathbb{E}\left[\min\left\{\log \frac{\|m_{t+1} - x^*\|}{\|m_t - x^*\|}, 0\right\} \mid \mathcal{F}_t\right] \ . && (2.9)
\end{aligned}$$

ここで，(1+1)-ES のアルゴリズムより，

$$\log \frac{\|m_{t+1} - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} = \log \frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \mathbb{I}\{f(x_t) \leqslant f(m_t)\} \tag{2.10}$$

が成立する．一般の関数 f のおいて，$f(x_t) \leqslant f(m_t)$ は必ずしも $\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|$ を意味しないため，この値は正になり得る．正になる値をクリップすることによって下限が得られるが，これは上式の両辺に $\mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\}$ を乗ずることに他ならない．すなわち，

$$\begin{aligned}
&\min\left\{\log \frac{\|m_{t+1} - x^*\|}{\|m_t - x^*\|}, 0\right\} && (2.11)\\
&= \min\left\{\log \frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \mathbb{I}\{f(x_t) \leqslant f(m_t)\}, 0\right\} && (2.12)\\
&= \log \frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \mathbb{I}\{f(x_t) \leqslant f(m_t)\} \mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\} && (2.13)
\end{aligned}$$

このとき，値は非負になるため，指示関数 $\mathbb{I}\{f(x_t) \leqslant f(m_t)\}$ を取り除いたとしても，値は増加しない．すなわち，

$$\geqslant \log \frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\} \ . \tag{2.14}$$

期待値をとれば(2.2)を得る．

(3) **の解説**　Hit-and-Run アルゴリズムを考えると，

$$\begin{aligned}
\|x_t - x^*\| &= \|m_t - x^* + \sigma_t z_t\| && (2.15)\\
&\geqslant \min_{\sigma \geqslant 0} \|m_t - x^* + \sigma z_t\| && (2.16)\\
&= \|m_t - x^* + \sigma_t^* z_t\| && (2.17)\\
&= \|x_t^* - x^*\| && (2.18)
\end{aligned}$$

が得られる．このとき，$\|x_t^* - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|$ が常に成立する．したがって，

$$\log \frac{\|x_t - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \mathbb{I}\{\|x_t - x^*\| \leqslant \|m_t - x^*\|\} \geqslant \log \frac{\|x_t^* - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} \ . \tag{2.19}$$

続いて，等式を示す．Hit-and-Run アルゴリズムにおける m_t, x_t^*, x^* の位置関係を幾何学的に考えると，z_t と $x^* - m_t$ のなす角 θ_t が $\theta_t > \pi/2$ となるとき $x_t^* = m_t$（$\sigma_t^* = 0$）となり，$\theta_t \leqslant \pi/2$ のとき $x_t^* - m_t = \sigma_t^* z_t$ と $x_t^* - x^*$ は直交することがわかる．すなわち，

$$\|x_t^* - x^*\| = \begin{cases} \|m_t - x^*\| \sin(\theta_t) & \theta_t \leqslant \pi/2 \\ \|m_t - x^*\| & \theta_t > \pi/2 \end{cases} \tag{2.20}$$

が得られる．$\theta_t > \pi/2$ の場合，$\log \frac{\|x_t^* - x^*\|}{\|m_t - x^*\|} = 0$ となることに注意すれば，(2.3)を得る．

(4) の解説　小問 (1) で示したとおり，$T_\beta^Y \leqslant T_\beta^X$ であることから，$\mathbb{E}[T_\beta^Y]$ の下限を得ることにより，$\mathbb{E}[T_\beta^X]$ を下からバウンドできる．小問 (2) および (3) と $d \geqslant 2$ のとき $\mathbb{E}[\log(\sin(\theta_t))\mathbb{I}\{\theta_t \leqslant \pi/2\} \mid \mathcal{F}_t] \geqslant -1/d$ が成立することから Y_t のドリフトの下界として $-1/d$ が得られ，Y_t が単調非増加系列であることから，講義資料の Negative Drift Analysis を用いることが可能である．これにより，

$$\mathbb{E}[T_\beta^X] \geqslant \mathbb{E}[T_\beta^Y] \geqslant -\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \log \frac{\|m_0 - x^*\|}{\epsilon} \tag{2.21}$$

を得る．

問 3　強凸かつリプシッツ平滑な関数が Assumption 1 を満たすことの確認

目的関数 $f(x) = g(h(x))$ が以下の性質を満たすとする：$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は狭義単調増加関数，$h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は連続的一階微分可能であり，任意の $z, \Delta \in \mathbb{R}^d$ について

$$\frac{L_\ell}{2}\|\Delta\|^2 \leqslant h(z+\Delta) - h(z) - \Delta^\top \nabla h(z) \leqslant \frac{L_u}{2}\|\Delta\|^2 \ . \tag{3.1}$$

このとき，Assumption 1 を $C_\ell = \frac{1}{V_d}\sqrt{\frac{L_\ell}{L_u}}$，$C_u = \frac{1}{V_d}\sqrt{\frac{L_u}{L_\ell}}$ について満たすことを示せ．ここで，$V_d = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma^{1/d}(d/2+1)}$ は d 次元単位超球の体積の d 乗根を表す．

解説　f_μ は g に対して不変であるため，一般性を失うことなく $f(x) = h(x) - h(x^*)$ と仮定する．ここで，x^* は f のユニークな最適解である．(3.1)を $z = x^*$ について考えると，$f(y) \leqslant f(x)$ のとき，

$$\frac{L_\ell}{2}\|y - x^*\|^2 \leqslant f(y) \leqslant f(x) \tag{3.2}$$

が得られる．すなわち，

$$\{y : f(y) \leqslant f(x)\} \subseteq \bar{\mathcal{B}}\left(x^*, \sqrt{\frac{f(x)}{L_\ell/2}}\right) \tag{3.3}$$

が成立する．$f_\mu(x)$ は上式左辺の volume の d 乗根であるから，

$$f_\mu(x) \leqslant \mu^{\frac{1}{d}}\left(\bar{\mathcal{B}}\left(x^*, \sqrt{\frac{f(x)}{L_\ell/2}}\right)\right) = V_d \sqrt{\frac{f(x)}{L_\ell/2}} \tag{3.4}$$

が得られる．ここで，μ は Lebesgue 測度である．同様にして，

$$\mathcal{B}\left(x^*, \sqrt{\frac{f(x)}{L_u/2}}\right) \subseteq \{y : f(y) < f(x)\} \tag{3.5}$$

および

$$f_\mu(x) \geqslant V_d \sqrt{\frac{f(x)}{L_u/2}} \tag{3.6}$$

が得られる．以上より，

$$\{y : f(y) \leqslant f(x)\} \subseteq \bar{\mathcal{B}}\left(x^*, \sqrt{\frac{L_u}{L_\ell}} \frac{f_\mu(x)}{V_d}\right) \qquad \mathcal{B}\left(x^*, \sqrt{\frac{L_\ell}{L_u}} \frac{f_\mu(x)}{V_d}\right) \subseteq \{y : f(y) < f(x)\} \tag{3.7}$$

が得られる．

問 4　Assumption 1 のもとで成功確率がバウンドされることの証明

Assumption 1 を仮定すると成功確率のバウンドが得られ，これが (1+1)-ES の一次収束の証明上重要な役割を果たす．ここでは，Assumption 1 のもとで成功確率のバウンドを導出する．

(1)　成功確率が以下を満たすことを示せ：

$$p_0^{\mathrm{succ}}(\bar{\sigma}; m) \leqslant \Phi\left(\bar{\mathcal{B}}\left(0, \frac{C_u}{\bar{\sigma}}\right); 0, \mathrm{I}\right) \quad . \tag{4.1}$$

ここで，$\Phi(\cdot; 0, I)$ は多変量標準正規分布のもとでの確率測度を表す．

(2)　成功確率が以下を満たすことを示せ：

$$p_0^{\mathrm{succ}}(\bar{\sigma}; m) \geqslant \Phi\left(\bar{\mathcal{B}}\left(\left(\frac{(2C_u - C_\ell)}{\bar{\sigma}}\right) e_1, \frac{C_\ell}{\bar{\sigma}}\right); 0, \mathrm{I}\right) \quad . \tag{4.2}$$

(1) **の解説**　以下，$\phi(x; m, \sigma^2 \mathrm{I})$ を平均ベクトル $m \in \mathbb{R}^d$，共分散行列が $\sigma^2 \mathrm{I}$ の多変量正規分布の確率密度関数を表すものとする．

任意の $m \in \mathbb{R}^d$ について，Assumption 1 のもとでは $S_0(m) = \{x : f(x) \leqslant f(m)\} \subseteq \bar{\mathcal{B}}_u$ となる閉球 $\bar{\mathcal{B}}_u$ が存在する．このとき，

$$p_0^{\mathrm{succ}}(\bar{\sigma}; m) = \int_{S_0(m)} \phi\left(x; m, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.3}$$

$$\leqslant \int_{\bar{\mathcal{B}}_u} \phi\left(x; m, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.4}$$

この積分は $\bar{\mathcal{B}}_u$ の中心が m である場合に最大化されるため，

$$\leqslant \int_{\|x-m\| \leqslant C_u f_\mu(m)} \phi\left(x; m, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.5}$$

$$= \int_{\|x\| \leqslant C_u f_\mu(m)} \phi\left(x; 0, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.6}$$

$$= \int_{\|x\| \leqslant C_u / \bar{\sigma}} \phi(x; 0, \mathrm{I}) dx \tag{4.7}$$

$$= \Phi\left(\bar{\mathcal{B}}\left(0, \frac{C_u}{\bar{\sigma}}\right); 0, \mathrm{I}\right) \quad . \tag{4.8}$$

(2) **の解説**　前問と同様，$\mathcal{B}_\ell \subseteq S_0(m) \subseteq \bar{\mathcal{B}}_u$ を満たす開球 $\mathcal{B}_\ell$ と閉球 $\bar{\mathcal{B}}_u$ が存在する．このとき，

$$p_0^{\mathrm{success}}(\bar{\sigma}; m) = \int_{S_0(m)} \phi\left(x; m, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.9}$$

$$\geqslant \int_{\mathcal{B}_\ell} \phi\left(x; m, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.10}$$

この積分は $\mathcal{B}_\ell$ が $\bar{\mathcal{B}}_u$ 上において m の反対側に存在する場合（すなわち，$\bar{\mathcal{B}}_u$ が中心 $\left(1 - \frac{C_u f_\mu(m)}{\|m\|}\right) m$，$\mathcal{B}_\ell$ の中心が $\left(1 - \frac{(2C_u - C_\ell) f_\mu(m)}{\|m\|}\right) m$ の状況）に最小となるため，

$$\geqslant \int_{\left\|x - \left(1 - \frac{(2C_u - C_\ell) f_\mu(m)}{\|m\|}\right) m\right\| \leqslant C_\ell f_\mu()} \phi\left(x; m, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.11}$$

$$= \int_{\left\|x - (2C_u - C_\ell) f_\mu(m) \frac{m}{\|m\|}\right\| \leqslant C_\ell f_\mu()} \phi\left(x; 0, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.12}$$

$$= \int_{\|x - ((2C_u - C_\ell) f_\mu(m)) e_m\| \leqslant C_\ell f_\mu(m)} \phi\left(x; 0, \left(f_\mu(m)\bar{\sigma}\right)^2 \mathrm{I}\right) dx \tag{4.13}$$

$$= \int_{\|x - ((2C_u - C_\ell)/\bar{\sigma}) e_m\| \leqslant C_\ell / \bar{\sigma}} \phi(x; 0, \mathrm{I}) dx \tag{4.14}$$

$$= \Phi\left(\bar{\mathcal{B}}\left(\left(\frac{(2C_u - C_\ell)}{\bar{\sigma}}\right) e_m, \frac{C_\ell}{\bar{\sigma}}\right); 0, \mathrm{I}\right) \quad . \tag{4.15}$$

ここで，$e_m = \frac{m}{\|m\|}$ とおいた．最右辺の値は e_m が単位ベクトルである限り変化しないので，これを e_1 に置き換えれば題意成立．