

連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2024
数理最適化への数式処理の一応用 — 制約想定が不要な最適性条件の導出 —
演習問題

2024 年 8 月 24 日–26 日 庵 智幸

ペナルティ関数法に基づく最適性条件

以下の制約付き非線形最適化問題を考える.

$$\min_{x \in C} f(x) \quad \text{subject to} \quad g(x) = 0 \quad (1)$$

ここで, $C \subset \mathbb{R}^n$ であり, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ および $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ はそれぞれ C^2 級のスカラー値およびベクトル値関数とする. 最適化問題 (1) に対するペナルティ関数 $P(x; r)$ および, 局所最適解 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ における局所ペナルティ関数 $P^{\text{loc}}(x; r, \hat{x})$ をそれぞれ以下で定義する.

$$P(x; r) = f(x) + rg^{\top}(x)g(x) \\ P^{\text{loc}}(x; r, \hat{x}) = f(x) + \|x - \hat{x}\|^2 + rg^{\top}(x)g(x)$$

■問題 1. C がコンパクトであることを仮定する. ある単調増加列 $r_k \uparrow \infty$ に対し, $P(x; r_k)$ の C 上の大域最適解を x_k^* とする. このとき, 点列 $\{x_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ は収束部分列を持ち, 全ての収束点は最適化問題 (1) の大域最適解となることを示せ.

Hint: (1) 式の大域最適解を x^* とすると, $g(x^*) = 0$ であるから, $P(x_k^*; r) \leq P(x^*; r) = f(x^*)$ が成り立つことを用いる. 収束部分列の存在は Bolzano-Weierstrass の定理 (コンパクト集合内の無限点列は収束部分列を含む) を用いればよい.

■問題 2. $C = \mathbb{R}^n$ とする. ある単調増加列 $r_k \uparrow \infty$ と問題 (1) の局所最適解 $\hat{x}$ に対し, 停留条件:

$$P_x^{\text{loc}}(x; r_k, \hat{x}) = 0$$

満たす点 x_k からなる点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ であって, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}$ となるものが存在すること, すなわち, そのような点列の存在が最適性必要条件であることを示せ.

Hint: 適当な実数 $\varepsilon > 0$ を選び, 閉球 $\mathcal{B}_{\varepsilon}(\hat{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon\}$ 上の最適化問題

$$\min_{x \in \mathcal{B}_{\varepsilon}(\hat{x})} f(x) + \|x - \hat{x}\|^2 \quad \text{subject to} \quad g(x) = 0$$

に前問の主張を適用する.

射影空間と斉次多項式

$n+1$ 次元実数空間から原点を除いた集合 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係を以下で定める.

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ such that } x = \lambda y \quad (2)$$

n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ をこの同値関係 (2) から定まる同値類の集合として定義する. すなわち,

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

とする. ある点 $(X_0, X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対し, これが属する同値類 $p \in \mathbb{P}^n$ を $(X_0 : X_1 : \dots : X_n)$ と表記する.

■問題 3. 部分集合 $U_0 := \{(X_0 : \dots : X_n) \in \mathbb{P}^n \mid X_0 \neq 0\}$ に対し, 写像

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow U_0, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

は全単射となることを示せ.

■問題 4. $f \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]$ を斉次多項式とする. 方程式 $f = 0$ が $\mathbb{P}^n$ 上で well-defined であることを示せ. すなわち, 点 $p \in \mathbb{P}^n$ のある斉次座標 $(X_0 : \dots : X_n)$ に対し $f(X_0, \dots, X_n) = 0$ が成り立つならば, 他の全ての斉次座標に対しても $f = 0$ が成り立つことを示せ.

接錐と数式処理

原点を含む代数的集合 $V \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 原点における接錐 $C_0(V)$ を以下で定義する.

$$C_0(V) := \mathbf{V}(\{f^{\min} \mid f \in \mathbf{I}(V)\}) \quad (3)$$

$\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間 (原点を通る直線) L は, あるベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ を用いて $L = \{tv \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ と表される. これを L のパラメータ表示と呼び, ここでは $L(v)$ と表記する. 原点を通る直線の列 $\{L_i\}_{i=1}^\infty$ の, 同じく原点を通る直線 L への収束を以下で定義する; あるパラメータ表示 $L(v)$ に対して, パラメータ表示 $L_i(v_i)$ で $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v$ となるものが存在する. このとき, ある $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = 0$ を満たす点列 $\{q_i\}_{i=1}^\infty \subset V \setminus \{0\}$ が存在して, 2 点 $0, q_i \in V$ を通る直線を L_i が $i \rightarrow \infty$ で L に収束するとき, L を V の原点における接線と呼ぶ.

■問題 5. 直線 $L \subset \mathbb{R}^n$ が V の原点における接線であるならば $L \subset C_0(V)$ であることを示せ.

Hint: 直線の収束の定義より, 各 i についてある $t_i \in \mathbb{R}$ が存在し, $q_i = t_i v_i$ が成り立つ.

注意: 実はこの問題の主張の逆

$$L \subset C_0(V) \implies L \text{ は } V \text{ の原点における接線}$$

を示すことも可能である. したがって, (3) 式により代数的に定義された接錐を, 原点における接

線の集合と同一視しても保守性は生じない。ただし、証明は煩雑なのでここでは省略する。

■問題 6. イデアル $\mathbf{I}(V) \subset \mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ の斉次化を

$$\mathbf{I}(V)^{\text{hom}} := \{f^{\text{hom}} \mid f \in \mathbf{I}(V)\} \subset \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]$$

で定める。また、 X_0 に関する消去順序 $>$ についての $\mathbf{I}(V)^{\text{hom}}$ の Gröbner 基底を $G_1, \dots, G_t \in \mathbb{R}[X]$ とする。このとき、 $g_i = G_i^{\text{dehom}} = G_i(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x]$ として、

$$C_0(V) = \mathbf{V}(g_1^{\min}, \dots, g_t^{\min})$$

が成り立つことを示せ。

Hint: $C_0(V)$ が (3) 式で定められているので、任意の $f \in \mathbf{I}(V)$ について $f^{\min} \in \langle g_1^{\min}, \dots, g_t^{\min} \rangle$ が成り立つことを示せばよい。具体的な手順は以下の通り。

1. $f^{\min} \notin \langle g_1^{\min}, \dots, g_t^{\min} \rangle$ となるような $f \in \mathbf{I}(V)$ の存在を仮定し、そのなかで $\text{LT}(f^{\min})$ の順序が最も小さいものを取る。
2. $G_1, \dots, G_t$ が Gröbner 基底であることから $\text{LT}(f^{\text{hom}}) = \langle \text{LT}(G_1), \dots, \text{LT}(G_t) \rangle$ を使い、 $\text{LT}(f^{\min})$ と $\text{LT}(g_i^{\min})$ の関係を調べる。
3. ある多項式 $\tilde{f} \in \mathbb{R}[X]$ であって、 $\tilde{f}^{\min} \notin \langle g_1^{\min}, \dots, g_t^{\min} \rangle$ であり、 $\text{LT}(\tilde{f}^{\min}) < \text{LT}(f^{\min})$ となるものが構成できることを示す。これは $\text{LT}(f^{\min})$ が最小であることに矛盾し、したがって背理法より題意が示される。

なお、ある斉次多項式 $G \in \mathbb{R}[X]$ の $>$ に関する先頭項が $\text{LT}(G) = \text{LT}(g^{\min})X_0^b$ と書けることを用いてよい (b はある整数)。ここで、 $\text{LT}(g^{\min})$ は $g^{\min}$ を $\mathbb{R}[X]$ の多項式と見なしたときの $>$ に関する先頭項を表す。

■問題 7. 配布プログラムを用いて、以下の多項式最適化問題に対する最適性必要条件を求めよ。

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \|x\|^2 \quad \text{subject to} \quad (x_2 - 2x_1^2 + 2)^2 - (x_3 - 1)^3 = 0$$

導出過程で得られる各種方程式の解をプロットし、それらが講義中で説明した通りの性質を持つ集合となっていることを確認せよ。また、KKT 条件や FJ 条件を同様に求め、それぞれから求まる最適解候補の集合にどのような違いがあるか観察せよ。