連続最適化および関連分野に関する夏季学校
連続最適化への応用に向けた常微分方程式の数値解析入門
演習問題

佐藤 峻

2023 年 8 月 9 日

問題 1. Runge–Kutta 法の安定性関数が,

$$R(z) = \frac{\det(I - zA + z\mathbf{1}b^\top)}{\det(I - zA)}$$

を満たすことを示せ.

問題 2. 任意の 1 次以上の精度をもつ陽的 Runge–Kutta 法について，その安定領域は有界であることを示せ.

問題 3. μ-強凸 L-平滑関数に対する Nesterov の加速勾配法に相当する線形 2 段階法

$$x^{(k+2)} - (1+\gamma)x^{(k+1)} + \gamma x^{(k)} = h\Big((1-\gamma^2)g\big(x^{(k+1)}\big) - \gamma(1-\gamma)g\big(x^{(k)}\big)\Big)$$

の絶対安定領域 $S \subseteq \mathbb{C}$ について，$S \cap \mathbb{R}$ を L, μ を用いて表せ ($L \geq \mu > 0$ とする)．ここで,

$$\gamma \coloneqq \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu}{L}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu}{L}}} \in [0, 1)$$

である.

問題 4. 写像 $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は L-Lipschitz 連続とする．任意の $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$ に対して，$x, y\colon [0, T) \to \mathbb{R}^d$ が,

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = g(x(t)) \quad (t \in (0,T)), && x(0) = x_0, \\ &\dot{y}(t) = g(y(t)) \quad (t \in (0,T)), && y(0) = y_0 \end{aligned}$$

を満たすとき,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \exp(Lt)\|x_0 - y_0\| \qquad (t \in (0,T))$$

が成立することを示せ.

問題 5. 2 段 2 次の陽的 Runge–Kutta 法を全て求めよ．また，具体的な計算により，どの手法についても，安定性関数は $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$ であることを確認せよ.

問題 6. 陽的な線形 3 段階法で，5 次精度を達成するものを求めよ．また，求めた線形 3 段階法が零安定でないことを示せ．(この問題については，次数条件を満たすパラメータを求める際に数値実験を用いてよい．)

問題 7. 凸関数に対する加速勾配法に対応する ODE

$$\ddot{x} + \frac{3}{t}\dot{x} + \nabla f(x) = 0, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0$$

を数値的に解いて挙動を観察せよ．ただし，目的関数 f や，数値解法は自由に定めてよい．(汎用の ODE ソルバーを用いても構わない．ただし，その場合は，実装に用いられている手法を確認すること).