ロバスト最適化モデリング入門演習問題 2022 年 8 月 9, 10 日

基礎的問題

1. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ \|\boldsymbol{x}\|_1 \geq \|\boldsymbol{x}\|_2$ を示せ
2. ノルムの公理 1.〜3. を用いて $\forall \boldsymbol{x}, \|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ を示せ
3. Cauchy-Schwarz の不等式 $\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2 \geq |\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y}|$ を示せ.
4. ユークリッドノルムが公理 1.〜3. を満たすことを示せ
5. ℓ_1 ノルムが公理 1.〜3. を満たすことを示せ
6. ℓ_∞ ノルムが公理 1.〜3. を満たすことを示せ
7. $\|\cdot\|', \|\cdot\|''$ を任意のノルムとする．このとき，次の各ノルムが公理 1.〜3. を満たすことを示せ
   (a) $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|', \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: 正則
   (b) $\|\boldsymbol{x}\| = \lambda_1\|\boldsymbol{x}\|' + \lambda_2\|\boldsymbol{x}\|'', \qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
   (c) $\|\boldsymbol{x}\| = \max\{\|\boldsymbol{x}\|', \|\boldsymbol{x}\|''\}$
8. CVaR がコヒレント尺度の 4 つの公理を満たすことを確認せよ
9. VaR が劣加法性を満たさない分布のペアを 1 組例示せよ
10. $\boldsymbol{L} := (L_1, ..., L_d) \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ のとき，$\mathrm{VaR}_\alpha[\boldsymbol{L}^\top \boldsymbol{x}]$ を簡潔に表せ. ($\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多次元正規分布を表す.）

問題 1

1. 最大 k ノルム $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_k$ がノルムの公理を満たすことを示せ
2. $|\!|\!|\boldsymbol{x}|\!|\!|_k^\circ = \max\{\|\boldsymbol{x}\|_1/k, \|\boldsymbol{x}\|_\infty\}$ を示せ
3. $f(\boldsymbol{x}) = \min\limits_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}\{\|\boldsymbol{y}\|_1 + k\|\boldsymbol{z}\|_\infty \,|\, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\}$ がノルムとなることを示せ．また，これの双対ノルムを求めよ.

問題 2　次のそれぞれの関係式を満たす L, U のうち，$\ln U/L$ を最小にするものとそのときの $\ln U/L$ を求めよ.

1. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, L\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq U\|\boldsymbol{x}\|_\infty$
2. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, L\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq U\|\boldsymbol{x}\|_2$
3. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, L\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq |\!|\!|\boldsymbol{x}|\!|\!|_k \leq U\|\boldsymbol{x}\|_2$

問題 3　$\delta > 0$ を定数，ξ_i を $[-1, 1]$ を分布の台とする対称な iid 確率変数とし，$\tilde{a}_j = (1 + \delta\xi_j)a_j,\ j = 1, ..., d$ とする. 定数 $\Omega > 0$ に対し，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が問題

$$\left|\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{x}\in X, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s. t.} & \sum\limits_{j=1}^{d} a_j x_j + \sum\limits_{j=1}^{d} \delta|a_j| y_j + \delta\Omega\sqrt{\sum_j a_j^2 z_j^2} \leq b \\ & y_j \geq x_j - z_j, y_j \geq z_j - x_j \end{array}\right.$$

の実行可能解であるならば,

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{j=1}^{d} \tilde{a}_j x_j > b\Big\} \leq \exp\big(-\tfrac{\Omega^2}{2}\big)$$

であることを示せ．

また，$f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \{\|\boldsymbol{y}\|_1 + \Omega\|\boldsymbol{z}\|_2 \,|\, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\}$ がノルムであることを示せ．また，その双対ノルムはどのようになるか?

問題 4

$$\mathrm{MV}_\lambda(\boldsymbol{\delta}) := \left| \begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{w}} \min\limits_{\boldsymbol{\mu}\in U(\hat{\boldsymbol{\mu}})} & \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{w} - \lambda \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} \\ \text{s. t.} & \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{w} = 1,\ \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right.$$

において，不確実性集合 U が

- $U = U_{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) := \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d \,|\, |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i,\ i = 1, ..., n \right\}$
- $U = U_{\delta,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\mu}}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) := \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d \,|\, (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\mu}}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \leq \delta^2 \right\}$

の場合の RO の目的関数がそれぞれ

$$\max_{\boldsymbol{w}} \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}^\top \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\delta}^\top |\boldsymbol{w}| - \lambda \boldsymbol{w}^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{w}$$

$$\max_{\boldsymbol{w}} \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}^\top \boldsymbol{w} - \delta \sqrt{\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{w}} - \lambda \boldsymbol{w}^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{w}$$

となることを確かめよ

問題 5　$L_i(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{R}_i^\top \boldsymbol{x}, \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}, \mathcal{Q} = \left\{ \boldsymbol{q} | \boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{S}\boldsymbol{u} = 0,\ \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq 1 \right\}$（$\boldsymbol{S}$ は正則な行列）のとき，Zhu, Fukushima, 2009 の問題

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathrm{CVaR}_{\mathbb{Q},\alpha}[\mathcal{L}(\boldsymbol{x})] \right\}$$

を簡略化し，2 次錐計画として表せ．

同様に，$\mathcal{Q} = \left\{ \boldsymbol{q} | \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{q} = 1, \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{q} \leq \frac{1}{\delta} \hat{\boldsymbol{p}} \right\}$ とした場合の問題を簡略化するとどうなるか?

問題 6

$$\max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \left| \begin{array}{lll} \max\limits_{\boldsymbol{q}}. & \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{q} & \\ \text{sub.to} & \sum\limits_{i=1}^n q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \varepsilon, & \leftarrow \lambda \geq 0 \\ & \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{q} = 1, & \leftarrow \eta \\ & (q_i > 0, \quad i = 1, ..., n) & \end{array} \right.$$

が以下のように簡約化されることを確認せよ

$$\max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \min_{\lambda>0,\eta} \left\{ \varepsilon\lambda + \eta + \lambda \sum_{i=1}^n p_i \exp\left(\frac{f_i - \eta}{\lambda} - 1 \right) \right\}$$

問題 7

$$d(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}) = \left| \begin{array}{lll} \min\limits_{(\pi_{ij})} & \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n c_{ij} \pi_{ij} & \\ \text{s. t.} & \sum\limits_{j=1}^n \pi_{ij} = q_i, & i = 1, ..., n, \\ & \sum\limits_{i=1}^n \pi_{ij} = p_j, & j = 1, ..., n, \\ & \pi_{ij} \geq 0, & i, j = 1, ..., n \end{array} \right.$$

で与えられる d を用い

$$\max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \left| \begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{q}}. & \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{q} \\ \text{sub.to} & d(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}) \leq \varepsilon, \\ & \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{q} = 1, \\ & \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right.$$

を簡略化し，最小化の LP として表せ．