偏微分方程式制約つき最適化問題とその応用

畔上 秀幸, 名古屋産業科学研究所

連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2022,

統計数理研究所, 2022年8月8-10日

1. はじめに

目次

- 1. はじめに
- 1.1 偏微分方程式制約つき最適化問題とは
- 1.2 具体的な問題のイメージ
- 1.3 理論上のイメージ
- 1.4 基本的な疑問点
- 1.5 講義の構成

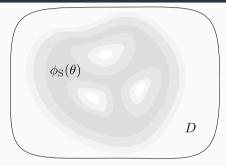
1.1 偏微分方程式制約つき最適化問題とは

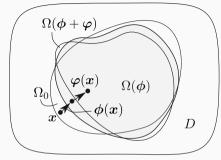
偏微分方程式制約つき最適化問題を最適設計問題とみなして用語を定義する.

変数
$$(\phi, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$$
 (関数の集合) $\phi \Longrightarrow$ 設計変数 $u \Longrightarrow$ 状態変数 偏微分方程式 あるシステム ϕ が与えられたとき,そのシステムの状態 u を $(-意に)$ 決定する方程式 \Longrightarrow 等式制約 評価関数 $f_0(\phi, u) \Longrightarrow$ 目的関数 $f_i(\phi, u)$ $(i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{I}|\}) \Longrightarrow$ 制約関数

 $\min_{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \left\{ f_0\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}\right) \mid f_i\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}\right) \leq 0 \ (i \in \mathcal{I}), \ \boldsymbol{u} \$ は偏微分方程式の解 $\right\}$

形状最適化問題の場合





(a) 位相最適化

密度変動 $\phi_{\mathrm{S}}\left(heta
ight)$

(設計変数 θ : D → \mathbb{R}

 $\phi_{\mathrm{S}}\left(\,\cdot\,\right)$: シグモイド関数)

(b) 形状最適化 (領域変動型)

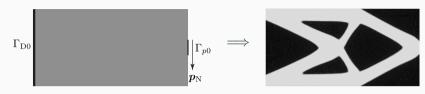
領域写像 $i + \phi : D \rightarrow D$

(設計変数 $\phi: D \to \mathbb{R}^d$

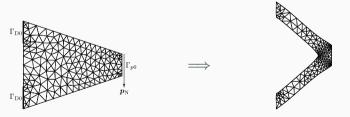
i: 恒等写像)

図 1.1: 2種類の形状最適化問題 $(D \subset \mathbb{R}^d, d \in \{2,3\})$

1.2 具体的な問題のイメージ



(a) **密度変動型**位相最適化



(b) 領域変動型形状最適化

図 1.2: 2次元線形弾性体の体積制約つき平均コンプライアンス最小化

1.3 偏微分方程式制約つき最適化問題の理論上イメージ

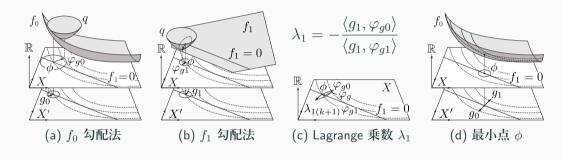


図 1.3: 体積制約つき平均コンプライアンス最小化の理論イメージ

1.4 基本的な疑問点

- Q-1 線形空間 X はどのように定義されるのか?
 - Q-1-1 許容集合 $\mathcal{D} \subset X$ のための条件
 - Q-1-2 評価関数 f_i の勾配 g_i $(i \in \mathcal{I})$ が入る線形空間
 - Q-1-3 評価関数 f_i の Hesse 形式 h_i $(i \in \mathcal{I})$ が入る線形空間
- **Q-2** f_i の**勾配** g_i と Hesse 形式 h_i はどのように得られるのか?
 - Q-2-1 勾配 g_i の求め方
 - Q-2-2 Hesse 形式 h_i の求め方
- Q-3 勾配法と Newton 法はどのように定義されるのか?
 - Q-3-1 勾配法の定義
 - Q-3-2 Newton 法の定義
- Q-4 探索ベクトルが許容集合 D に入る条件は何か?

1.5 講義の構成

- 1. はじめに
- 2. **関数解析**で使われる表記法と基本的な結果 [1, Chapter 4]
- 3. 偏微分方程式の境界値問題に対する弱形式と解の存在 [1, Chapter 5]
- 4. **数値解析**の原理 [1, Chapter 6]
- 5. 基本的な疑問点に対する回答例 [1, Chapters 7, 8, 9]
- 6. 数値例と理論的考察
- 7. 実問題への応用例
 - スポーツシューズの最適設計
 - 嚥下における筋活動の同定
- 8. おわりに

本的な結果

2. 関数解析で使われる表記法と基

目次

- 2. 関数解析で使われる表記法と基本的な結果
- 2.1 関数空間の表記法
- 2.2 Schwartz 超関数
- 2.3 完備性 (距離空間における連続性)
- 2.4 コンパクト性
- 2.5 Sobolev 埋蔵定理
- 2.6 作用素
- 2.7 不等式

2.1 関数空間の表記法

$$W^{s,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^d
ight)$$
 Schwartz 超関数の意味で $s\in[0,\infty]$ 階導関数まで $p\in[1,\infty]$ 乗可積分な関数 $\Omega\to\mathbb{R}^d$ の集合 (Sobolev 空間) $s=0$ のとき, $W^{0,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)=L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ (Lebesgue 空間) $p=2$ のとき, $W^{s,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)=H^s\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ 内積が定義される \Longrightarrow Hilbert 空間の性質をもつ $(u,v)_{H^1(\Omega;\mathbb{R})}=\int_{\Omega}\left(uv+\nabla u\cdot\nabla v\right)\mathrm{d}x$, $\left(u,v\right)_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}=\int_{\Omega}\left\{u\cdot v+\left(\nabla u^\mathrm{T}\right)\cdot\left(\nabla v^\mathrm{T}\right)\right\}\mathrm{d}x$ $L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ 有界かつ可積分な関数の集合 $W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ Lipschitz 連続な関数の集合 $(\approx C^{0,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right))$

$$C^k\left(ar{\Omega};\mathbb{R}^d
ight)$$
 $\left(ar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega
ight)$ $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 階導関数が連続な関数の集合 $C_0\left(\Omega;\mathbb{R}
ight)$ $\left\{f\in C\left(\Omega;\mathbb{R}
ight)=C^0\left(\Omega;\mathbb{R}
ight)\mid f$ の台が Ω 上のコンパクト集合 $\right\}$ $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}
ight)=C^k\left(\Omega;\mathbb{R}
ight)\cap C_0\left(\Omega;\mathbb{R}
ight)$ $\sigma\in(0,1]$ に対して,Hölder 連続な関数の集合 $\sigma=1$ のとき, $C^{0,1}\left(ar{\Omega};\mathbb{R}
ight)$ Lipschitz 連続な関数の集合

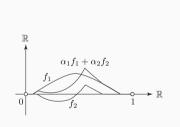


図 2.1: $C_0(\Omega;\mathbb{R})$ の要素

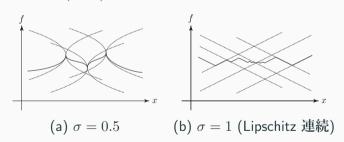


図 2.2: Hölder 連続な関数

2.2 Schwartz 超関数

汎関数 $\langle f, \cdot \rangle : C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$ が

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \phi \, \mathrm{d}x < \infty \quad \forall \phi \in C_0^\infty (\Omega; \mathbb{R})$$

を満たすとき、 $\langle f,\cdot \rangle$ を f より定まる有界線形汎関数とよぶ。 $\langle \partial f/\partial x_i,\cdot \rangle$ が

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{for } i \in \{1, \dots, d\}$$

を満たすとき、 $\langle \partial f/\partial x_i, \cdot \rangle$ を f から定まる Schwartz 超関数の偏導関数といい、 $\partial f/\partial x_i$ とかく.

例題 2.1 (Heaviside 階段関数の導関数)

Heaviside 階段関数の Schwartz の超関数としての導関数は、Dirac のデルタ 関数となることを示せ、

(解答) Heaviside 階段関数と Dirac のデルタ関数は

$$h = \begin{cases} 0 & \text{in } (-\infty, 0) \\ 1 & \text{in } (0, \infty) \end{cases}, \quad \langle \delta, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta \phi \, \mathrm{d}x = \phi \, (0) \quad \forall \phi \in C_0^{\infty} \, (\Omega; \mathbb{R})$$

で定義される. Schwartz 超関数としての h の導関数は次となる.

$$\langle \nabla h, \phi \rangle = \int_{0}^{\infty} \nabla h \phi \, \mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} h \nabla \phi \, \mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} \nabla \phi \, \mathrm{d}x = \phi \, (0) = \langle \delta, \phi \rangle \, \square$$

例題 2.2 (不連続関数の導関数)

図 2.3 の不連続関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の Schwartz 超関数としての導関数を示せ.

(解答) Schwartz 超関数の導関数の定義より、次が成り立つ。

$$\langle \nabla f, \phi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f \nabla \phi \, dx = -\int_{-\infty}^{0} f \nabla \phi \, dx - \int_{0}^{\infty} f \nabla \phi \, dx$$
$$= (f(0_{+}) - f(0_{-})) \phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \nabla f \phi \, dx$$
$$= (f(0_{+}) - f(0_{-})) \langle \delta, \phi \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \nabla f \phi \, dx$$

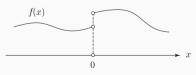


図 2.3: 不連続な関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2.3 完備性 (距離空間における連続性)

距離空間 X 上の無限点列 $\{oldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\lim_{n,m\to\infty}d\left(\boldsymbol{x}_{n},\boldsymbol{x}_{m}\right)=0$$

を満たすとき、 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を Cauchy 列という。距離空間 X のいかなる Cauchy 列も X 内の点に収束するとき,X は完備であるという。

完備なノルム空間 (ノルムが定義された線形空間) X を Banach 空間という.

 $C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$, $C^{k,\sigma}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$, $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$, $W^{s,p}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は、それぞれ次をノルムとして Banach 空間となる。 $\boldsymbol{\beta}=\left(\beta_1,\ldots,\beta_d\right)^{\top}\in\left\{0,\ldots,k\right\}^d$ は多重指数を表す。

$$\begin{split} \|f\|_{C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)} &= \max_{|\beta| \leq k} \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \left| \nabla^{\beta} f\left(\boldsymbol{x}\right) \right|, \\ \|f\|_{C^{k,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)} &= \|f\|_{C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)} + \max_{|\beta| = k} \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \bar{\Omega}, \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \frac{\left| \nabla^{\beta} f\left(\boldsymbol{x}\right) - \nabla^{\beta} f(\boldsymbol{y}) \right|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^{\sigma}}, \\ \|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})} &= \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f\left(\boldsymbol{x}\right)|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/p} & \text{for } p \in [1,\infty) \\ \text{ess } \sup_{\mathbf{a}.\mathbf{e}.\ \boldsymbol{x} \in \Omega} |f\left(\boldsymbol{x}\right)| & \text{for } p = \infty \end{cases}, \\ \|f\|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} &= \begin{cases} \left(\sum_{|\beta| \leq k} \|\nabla^{\beta} f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})}^p \right)^{1/p} & \text{for } p \in [0,\infty) \\ \max_{|\beta| < k} \|\nabla^{\beta} f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R})} & \text{for } p = \infty \end{cases}$$

例題 2.3 (連続関数の L^2 ノルムによる Cauchy 列)

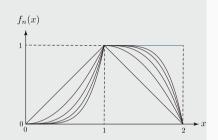
 $C([0,2];\mathbb{R})$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える.

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{in } (0,1) \\ 1 - (x-1)^n & \text{in } (1,2) \end{cases}$$

 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ \mathcal{U} ,

列が収束する関数を求めよ.

をノルムとおいた Cauchy 列になっていることを示せ、また、その Cauchy



答) 関数列
$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$
 に対して、 $m,n\to\infty$ のとき、
$$(f_m,f_n)_{L^2((0,2);\mathbb{R})} = \int_0^1 x^{m+n} \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left\{1-(x-1)^m\right\} \left\{1-(x-1)^n\right\} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{1+m+n} + \frac{m}{1+m} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+m+n} \to 1,$$

$$||f_m - f_n||_{L^2((0,2);\mathbb{R})}^2 = (f_m, f_m)_{L^2((0,2);\mathbb{R})} - 2(f_n, f_m)_{L^2((0,2);\mathbb{R})} + (f_n, f_n)_{L^2((0,2);\mathbb{R})}$$

$$\to 0$$

 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ ノルムを用いたときの Cauchy 列. この Cauchy 列は

$$f = egin{cases} 0 & \mbox{in } [0,1) \\ 1 & \mbox{in } [1,2] \end{cases}$$

に収束する. 実際,
$$n \to \infty$$
 のとき, 次を得る.

に収束する.実際,
$$n \to \infty$$
 のとき,次を得る.
$$\|f_n - f\|_{L^2((0,2);\mathbb{R})}^2 = \int_0^1 x^{2n} \mathrm{d}x + \int_1^2 \left\{ -(x-1)^n \right\}^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1+2n} \to 0 \square$$

例題 2.3 から次のことがいえる.

1. $f \in C([0,2]; \mathbb{R})$ のノルムは

$$||f||_{C([0,2];\mathbb{R})} = \sup_{x \in [0,2]} |f(x)|$$

で定義される. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はこのノルムでは Cauchy 列にならない.

- 2. $C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ の $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ ノルムによる Cauchy 列が収束する関数をすべて含むように**完備化**された集合を $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ とおいたという解釈ができる.そのことは, \mathbb{Q} の \mathbb{R} ノルムによる Cauchy 列の収束点をすべて含むような集合を \mathbb{R} とおいたことと同様である.
- 3. $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ は $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ あるいは $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ の完備化にもなっていることが示される.

2.4 コンパクト性

X を完備な距離空間, V をその部分集合とする. V の任意の無限点列が V の中に収束する部分無限点列を含むとき, V はコンパクトであるという. V の閉包の中に収束する部分無限点列を含むとき, V は相対コンパクトであるという.

コンパクト性について、次のことがいえる.

- 1. V がコンパクトならば、V は有界閉集合である.
- 2. 逆命題「V が有界閉集合ならば、V はコンパクトである」は、X が有限 次元ベクトル空間のときに成り立つが、無限次元空間では成り立たない。
 - 無限次元空間の単位球はコンパクトではない。なぜならば、基底ベクトルが $(1,0,0,\ldots)$, $(0,1,0,\ldots)$, \ldots のように無限個とれて、Cauchy 列を含まない無限点列がつくれるからである。

2.5 Sobolev 埋蔵定理

定理 2.4 (Sobolev 埋蔵定理)

$$k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$$
, $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, q^*]$, $q^* = d/\{(d/p) - k\}$ $(k - d/p < 0)$, $q^* < \infty$ $(k - d/p = 0)$, $q^* = \infty$ $(k - d/p > 0)$ に対して

$$W^{k+1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)\subset W^{k,q}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$$

が成り立つ. また、 $0 < \sigma = k - d/p < 1$ に対して、次が成り立つ.

$$W^{k,p}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)\subset C^{0,\sigma}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$$

さらに、 $q \in [1,q^*]$ を $q \in [1,q^*]$ に置き換えたとき、埋蔵記号 \subset はコンパクト埋蔵記号 \in に置き換えられる (Rellich–Kondrachov コンパクト埋蔵定理)

2.6 作用素

関数空間 X から関数空間 Y への写像 $f: X \to Y$ が

$$f(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2) = \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{x}_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X \quad (線形性),$$

$$\sup_{\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{0}_X\}} \frac{\|f(\boldsymbol{x})\|_Y}{\|\boldsymbol{x}\|_X} < \infty \quad (有界性)$$

を満たすとき、f を有界線形作用素という。その全体集合を $\mathcal{L}(X;Y)$ とかく。

f が有界ならば、 $f: X \to Y$ は連続となる.

 $\mathcal{L}(X;Y)$ は、次をノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X;Y)}$ とする Banach 空間になる.

$$||f||_{\mathcal{L}(X;Y)} = \sup_{\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}} \frac{||f(\boldsymbol{x})||_Y}{||\boldsymbol{x}||_X}$$

双対空間

X を Banach 空間とする. 次を満たす有界線形汎関数 $\langle \,\cdot\,,u \rangle_{X'\times X}$ の全体集合 $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ を X の双対空間 X' とよぶ.

$$\int_{\Omega} vu \, \mathrm{d}x = \langle v, u \rangle_{X' \times X} < \infty \quad \forall u \in X$$
 (2.1)

任意の $u \in X$ に対する $\langle \cdot, u \rangle_{X' \times X}$ の全体集合は, (2.1) を満たす関数 v の全体集合と同一視できる. そこで, $v \in X'$ ともかく.

記号 $\langle v, u \rangle_{X' \times X}$ は $(v, u) \in X' \times X$ の双対積とよばれる.

Banach 空間 X の双対空間は、次をノルムとする Banach 空間になる.

$$\left\|v\right\|_{X'} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\left|\langle v, u \rangle_{X' \times X}\right|}{\left\|u\right\|_{X}} = \sup_{u \in X, \left\|u\right\|_{X} = 1} \left|\langle v, u \rangle_{X' \times X}\right|$$

Fréchet 微分

X と Y を Banach 空間とする. $x \in X$ の近傍 $B \subset X$ 上で $f: B \to Y$ が定義されているとする. 任意の変動ベクトル $y_1 \in X$ に対して,

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_1\|_X \to 0} \frac{\|f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1]\|_Y}{\|\boldsymbol{y}_1\|_X} = 0$$

を満たす有界線形作用素 $f'(x)[\cdot] \in \mathcal{L}(X;Y)$ が存在するとき、 $f'(x)[y_1]$ を f の x における Fréchet 微分という。さらに、任意の $y_2 \in X$ に対して、

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_2\|_X \to \mathbf{0}_X} \frac{\|f'(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2)[\boldsymbol{y}_1] - f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1] - f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]\|_Y}{\|\boldsymbol{y}_2\|_X} = 0$$

を満たす $f''(x)[y_1, \cdot] \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) = \mathcal{L}^2(X \times X; Y)$ が存在するとき、 $f''(x)[y_1, y_2]$ を f の x における 2 階の Fréchet 微分という.

汎関数の Fréchet 微分

汎関数 $f: X \to \mathbb{R}$ の $u \in X$ における Fréchet 微分は、次のように定義される.

$$f'(u)[w] = \langle f'(u), w \rangle = \langle g(u), w \rangle \quad \forall w \in X$$

g(u) は勾配とよばれ、X の双対空間の要素 $g \in X'$ となる.

Riesz の表現定理

定理 2.5 (Riesz の表現定理)

X を Hilbert 空間, X' を X の双対空間とする. $\phi \in X'$ に対して, 次を満たすある $x \in X$ が一意に存在する.

$$\langle \phi, y \rangle_{X' \times X} = (x, y)_X \quad \forall y \in X, \quad \|\phi\|_{X'} = \|x\|_X$$

また、次を満たす同型写像 $\tau: X' \to X$ が存在する.

$$\langle \phi, \boldsymbol{y} \rangle_{X' \times X} = (\boldsymbol{\tau} \phi, \boldsymbol{y})_X, \quad \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{L}(X';X)} = 1$$

トレース作用素

定理 2.6 (トレース定理)

 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ を Lipschitz 領域とする. このとき, $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R})$, $p\in(1,\infty)$, に対する有界線形作用素 $\gamma:W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R})\to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega;\mathbb{R})$ で, $f\in C^{0,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ に対して, 次を満たすものが一意に存在する.

$$\gamma f = f|_{\partial\Omega}$$

 γ は**トレース作用素**とよばれる. Sobolev 埋蔵定理で使われる微分の階数を表す $k-\frac{d}{p}$ は, $1-\frac{d}{p}=\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{d-1}{p}$ のように不変となる.

2.7 不等式

定理 2.7 (Hölder の不等式)

 $d \in \mathbb{N}$ に対して、 Ω を \mathbb{R}^d 上の可測集合とし、 $p,q \in (1,\infty)$ は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たすとする. このとき, $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ と $g \in L^q(\Omega;\mathbb{R})$ に対して

$$||fg||_{L^1(\Omega;\mathbb{R})} \le ||f||_{L^p(\Omega;\mathbb{R})} ||g||_{L^q(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ.

p=q=2 のとき、**Schwarz の不等式**とよばれる.

定理 2.8 (Poincaré の不等式)

 $f\in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$, $p\in[1,\infty)$, に対して、 Ω と p だけに依存する正定数 c が存在して、

$$||f - f_0||_{L^p(\Omega;\mathbb{R})} \le c ||\nabla f||_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}, \quad f_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx$$

が成り立つ。ただし、 $|\Omega|=\int_\Omega \mathrm{d}x$ とする。また、 $|\Gamma_\mathrm{D}|>0$ なる $\Gamma_\mathrm{D}\subset\partial\Omega$ において f=0 のとき、次が成り立つ。

$$||f||_{L^p(\Omega;\mathbb{R})} \le c ||\nabla f||_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}$$

系 2.9 (Poincaré の不等式)

 $k \in \mathbb{N}$ および $p \in [1, \infty)$ とする. $|\Gamma_{\mathrm{D}}| > 0$ なる $\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial \Omega$ において f = 0 の とき、 Ω と p だけに依存する正定数 c が存在して、

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} \le ||f||_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} \le c |f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ. ただし、 $|\cdot|_{W^{k,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)}$ を次のように定義する.

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\sum_{|\beta|=k} \left\| \nabla^{\beta} f \right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})}^p \right)^{1/p} & \text{for } p \in [0,\infty) \\ \max_{|\beta|=k} \left\| \nabla^{\beta} f \right\|_{L^{\infty}(\Omega;\mathbb{R})} & \text{for } p = \infty \end{cases}$$

する弱形式と解の存在

3. 偏微分方程式の境界値問題に対

目次

- 3. 偏微分方程式の境界値問題に対する弱形式と解の存在
- 3.1 Poisson 問題
- 3.2 抽象的变分問題
- 3.3 解の正則性
- 3.4 線形弾性問題

3.1 Poisson 問題

問題 3.1 (Poisson 問題)

関数 $b: \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$), $u_D: \Gamma_D \to \mathbb{R}$ ($\Gamma_D \subset \partial \Omega$), $p_N: \Gamma_N \to \mathbb{R}$ ($\Gamma_N = \partial \Omega \setminus \bar{\Gamma}_D$) が与えられたとき、次を満たす関数 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ を求めよ.

$$-\Delta u = b$$
 in Ω (Poisson 方程式, $b = 0$ のとき Laplace 方程式), (3.1)

$$\partial_{\nu}u=p_{\mathrm{N}}$$
 on Γ_{N} (Neumann 条件, 自然/第2種境界条件), (3.2)

$$u=u_{\rm D}$$
 on $\Gamma_{\rm D}$ (Dirichlet 条件, 基本/第 1 種境界条件) (3.3)

ただし、 $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ 、 $\nabla = \partial/\partial x$ 、 ν : 外向き単位法線、 $\partial_{\nu} = \nu \cdot \nabla$ とかく.

Poisson 問題の弱形式

$$U = \left\{ v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \middle| v = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathcal{D}} \right\}$$
(3.4)

とおく. (3.1) の両辺に任意の $v \in U$ をかけて Ω で積分すれば,

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_{N}} \partial_{\nu} u v \, d\gamma = \int_{\Omega} b v \, dx$$
 (3.5)

Gauss-Green の定理と Γ_D 上で v=0 が使われた. (3.2) も同様にして,

$$\int_{\Gamma_{N}} \partial_{\nu} u v \, d\gamma = \int_{\Gamma_{N}} p_{N} v \, d\gamma \tag{3.6}$$

(3.6) を (3.5) に代入すれば、Poisson 問題の弱形式を得る.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} bv \, dx + \int_{\Gamma_{N}} p_{N} v \, d\gamma$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \tag{3.7}$$

$$l(v) = \int_{\Omega} bv \, dx + \int_{\Gamma_{N}} p_{N}v \, d\gamma$$
 (3.8)

問題 3.2 (Poisson 問題の弱形式)

U を (3.4) とおく、 $b \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$, $p_{\mathrm{N}} \in L^2(\Gamma_{\mathrm{N}};\mathbb{R})$ および $\tilde{u}_{\mathrm{D}} \in H^1(\Omega;\mathbb{R})$ ($\tilde{u}_{\mathrm{D}}|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = u_{\mathrm{D}}$) とする、 $a(\cdot,\cdot)$ と $l(\cdot)$ はそれぞれ (3.7) と (3.8) とする、このとき、次を満たす $u-\tilde{u}_{\mathrm{D}} \in U$ ($u \in U(\tilde{u}_{\mathrm{D}})$) を求めよ.

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in U$$

(参考) アフィン部分空間

X を線形空間, U を X の部分線形空間とする. $u_0 \in X \setminus U$ に対して,

$$U(u_0) = \{ u_0 + u \mid u \in V \}$$

とかいて、 $U(u_0)$ を U のアフィン部分空間という.

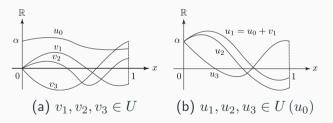


図 3.1:
$$X = H^1((0,1);\mathbb{R})$$
 の部分線形空間 $U = \{u \in H^1((0,1);\mathbb{R}) \mid u(0) = 0\}$ と $u_0 \in X$ $(u_0(0) = \alpha)$ に対するアフィン部分空間 $U(u_0) = \{u \in H^1((0,1);\mathbb{R}) | u(0) = \alpha\} = \{u_0 + u \mid u \in U\}$

拡張 Poisson 問題

問題 3.3 (拡張 Poisson 問題)

関数 $b: \Omega \to \mathbb{R}$, $c_{\Omega}: \Omega \to \mathbb{R}$, $p_{R}: \partial \Omega \to \mathbb{R}$, $c_{\partial \Omega}: \partial \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき, 次を満たす関数 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ を求めよ.

$$-\Delta u + c_{\Omega} u = b \quad \text{in } \Omega, \tag{3.9}$$

$$\partial_{\nu}u + c_{\partial\Omega}u = p_{R}$$
 on $\partial\Omega$ (Robin 条件, 第 3 種境界条件), (3.10)

拡張 Poisson 問題の弱形式

$$U = H^{1}(\Omega; \mathbb{R}), \qquad (3.11)$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + c_{\Omega} u v) \, dx + \int_{\partial \Omega} c_{\partial \Omega} u v \, d\gamma, \qquad (3.12)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} bv \, dx + \int_{\partial \Omega} p_{R} v \, d\gamma$$
 (3.13)

問題 3.4 (拡張 Poisson 問題の弱形式)

U を (3.11) とおく、 $b \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$, $c_\Omega \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, $p_R \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R})$, $c_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega;\mathbb{R})$ とする、 $a(\cdot,\cdot)$ と $l(\cdot)$ はそれぞれ (3.12) と (3.13) とする、このとき、次を満たす $u \in U$ を求めよ、

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U$$

3.2 抽象的変分問題

問題 3.5 (抽象的変分問題)

U を実 Hilbert 空間, $a:U\times U\to\mathbb{R}$ を U 上の双 1 次形式, $l=l\left(\cdot\right)=\langle l,\cdot\rangle\in U'$ とする.次を満たす $u\in U$ を求めよ.

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in U$$

定理 3.6 (Lax-Milgram の定理)

問題 3.5 において、a は強圧的かつ有界、すなわち、

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \ a(v, v) \ge \alpha \|v\|_U^2, \ |a(u, v)| \le \beta \|u\|_U \|v\|_U \quad \forall u, v \in U$$

とする. また、 $l \in U'$ とする. このとき、問題 3.5 の解 $u \in U$ は一意に存在して、次が成り立つ.

$$||u||_U \le \frac{1}{\alpha} ||l||_{U'}$$

この定理は、Riesz の表現定理を使って証明される.

例題 3.7 (Poisson 問題の解の一意存在)

問題 3.2 において、 $|\Gamma_{\rm D}|$ (= $\int_{\Gamma_{\rm D}} {\rm d}\gamma$) が正のとき、解 $\tilde{u}=u-\tilde{u}_{\rm D}\in U$ は一意に存在することを示せ.

(解答) 問題 3.2 が Lax-Milgram の定理の仮定を満たせばよい.

$$U=\{u\in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}
ight)|\ u=0\ ext{on}\ \Gamma_{\mathrm{D}}\}$$
 は Hilbert 空間である。また、

$$a(u - \tilde{u}_{D}, v) = l(v) - a(\tilde{u}_{D}, v) = \hat{l}(v) \quad \forall v \in U$$

とおけば、問題 3.2 は、 $\tilde{u} = u - \tilde{u}_D \in U$ を求める問題にかきかえられる.

1. (a の強圧性) Poincaré の不等式の系より,

$$a(v,v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \|\nabla v\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R}^{d})}^{2} \ge \frac{1}{c^{2}} \|v\|_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R})}^{2}$$

2. (a の有界性) Hölder の不等式より,

$$|a(u,v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \le \|\nabla u\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R}^{d})} \|\nabla v\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R}^{d})}$$
$$\le \|u\|_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R})} \|v\|_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R})}$$

3. $(\hat{l} \in U') \partial \Omega$ は Lipschitz 境界より,トレース作用素のノルム

$$\|\gamma\|_{\mathcal{L}\left(H^{1}(\Omega;\mathbb{R});H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R})\right)} = \sup_{v \in H^{1}(\Omega;\mathbb{R}) \setminus \{0_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R})}\}} \frac{\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R})}}{\|v\|_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R})}} \equiv c_{1} < \infty$$

Hölder の不等式を用いれば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left| \hat{l} \left(v \right) \right| &\leq \int_{\Omega} \left| bv \right| \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathbf{N}}} \left| p_{\mathbf{N}} v \right| \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\Omega} \left| \boldsymbol{\nabla} \tilde{u}_{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \right| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \left\| b \right\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R})} \left\| v \right\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R})} + \left\| p_{\mathbf{N}} \right\|_{L^{2}(\Gamma_{\mathbf{N}};\mathbb{R})} \left\| v \right\|_{L^{2}(\Gamma_{\mathbf{N}};\mathbb{R})} \\ &+ \left\| \boldsymbol{\nabla} \tilde{u}_{\mathbf{D}} \right\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R}^{d})} \left\| \boldsymbol{\nabla} v \right\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R}^{d})} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\|b\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R})} + c_{1} \|p_{N}\|_{L^{2}(\Gamma_{N};\mathbb{R})} + \|\tilde{u}_{D}\|_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R})} \right) \|v\|_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R})}$$

 $b\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}\right),\ p_{\mathrm{N}}\in L^2\left(\Gamma_{\mathrm{N}};\mathbb{R}\right),\ \tilde{u}_{\mathrm{D}}\in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ より、右辺の () は有界、すなわち、l は U 上の有界線形汎関数となる.

3.3 解の正則性

境界 $\partial\Omega$ は十分滑らか $(\nu \in C(\Gamma_N; \mathbb{R}))$ のとき,

$$-\Delta u = b \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_{\nu} u = p_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \quad u = u_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}$$

が成り立つことから,

$$b \in L^2(\Omega; \mathbb{R}), \quad p_{\mathcal{N}} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}), \quad \tilde{u}_{\mathcal{D}} \in H^2(\Omega; \mathbb{R})$$

ならば、 $u \in H^2\left(\Omega \setminus \bar{B};\mathbb{R}\right)$ となる。B は Dirichlet 境界と Neumann 境界の境界 $\bar{\Gamma}_N \cap \bar{\Gamma}_D$ 近傍とする。**Sobolev の埋蔵定理**によれば、 $d \in \{2,3\}$ のとき $\sigma \in (0,1/2)$ に対して $H^2\left(\Omega;\mathbb{R}\right) \subset C^{0,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ となる (特異性なし)。

境界の正則性

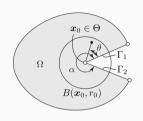


図 3.2: 角をもつ2次元領域

u は次のように展開される.

$$u\left(r,\theta\right) = \sum_{i \in \{1,2,\cdots\}} k_i u_i\left(r\right) \tau_i\left(\theta\right) + u_{\mathrm{R}}$$

 $u_{\rm R}$ は正則項, $\tau_i(\theta)$ は境界条件に依存した $\theta \in (0,\alpha)$ の実数値関数を表す.

 Γ_1 と Γ_2 がともに同次 Dirichlet 境界 (u=0), ともに同次 Neumann 境界 $(\partial_{\nu}u=0)$, 混合境界 のとき, $\tau_i(\theta)$ は次式となる.

$$\tau_i(\theta) = \sin \frac{i\pi}{\alpha} \theta, \quad \tau_i(\theta) = \cos \frac{i\pi}{\alpha} \theta, \quad \tau_i(\theta) = \sin \frac{i\pi}{2\alpha} \theta$$

 $\Delta \left(r^{\omega} \sin \omega \theta \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(r^{\omega} \sin \omega \theta \right) = 0$

 ω は $\omega > 1/4$ を満たす 1 ではない実数とする. (3.14) より,

一方, Laplace 作用素 Δ に対して、次が成り立つ。

 $u_i(r) = r^{\omega}$

であれば、Laplace 方程式が満たされる。これより、次の結果を得る。

 $u(r,\theta) = kr^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha} \theta + u_{\rm R}$ (ともに同次 Dirichlet 境界),

 $u\left(r,\theta\right)=kr^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}\theta+u_{\mathrm{R}}$ (ともに同次 Neumann 境界), $u(r,\theta) = kr^{\pi/(2\alpha)}\sin\frac{\pi}{2\alpha}\theta + u_{\rm R}$ (混合境界)

ただし、k は α に依存した定数である.

(3.14)

(3.15)

(3.16)

(3.17)

48 / 142

命題 3.8 (特異項の正則性)

 Ω は 2 次元有界領域で、 x_0 を $\partial\Omega$ 上の開き角 $\alpha\in(0,2\pi)$ の角点とする。関数 u は x_0 の近傍 $B(x_0,r_0)\cap\Omega$ で

$$u = r^{\omega} \tau \left(\theta\right)$$

のように与えられたとする。ただし、 $\tau(\theta)$ は $C^{\infty}((0,\alpha),\mathbb{R})$ の要素とする。このとき、 $k \in \{0,1,2,\cdots\}$ および $p \in (1,\infty)$ に対して、

$$\omega > k - \frac{2}{p} \tag{3.18}$$

が成り立てば、u は $W^{k,p}(B(\boldsymbol{x}_0,r_0)\cap\Omega;\mathbb{R})$ に入る.

(証明) $u = r^{\omega_{\tau}}(\theta)$ の k 階導関数は $r^{\omega - k}\tilde{\tau}(\theta)$ の項の和で構成される.ここで, $\tilde{\tau}(\theta)$ は $C^{\infty}((0,\alpha),\mathbb{R})$ の要素である.そこで,u の k 階導関数が $B(\boldsymbol{x}_0,r_0)\cap\Omega$ 上で p 乗 Lebesgue 可積分であるためには,

$$\int_{0}^{r_{0}} \int_{0}^{\alpha} r^{p(\omega-k)} r \tilde{\tau}(\theta) d\theta dr < \infty$$

が成り立てばよい. そのためには,

$$p(\omega - k) + 1 > -1$$

であればよい. この関係は (3.18) を与える.

例題 3.9 (角点近傍における解の正則性)

 Ω は 2 次元有界領域で、 $x_0 \in \Theta$ を開き角 $\alpha \in (0, 2\pi)$ の角点とする.このとき、 x_0 の近傍で Poisson 問題 (問題 3.1) の解 u が $W^{1,\infty}(B(x_0, r_0) \cap \Omega; \mathbb{R})$ に入る開き角 α の条件を求めよ.

(解答) Γ_1 と Γ_2 が同一種境界ならば、(3.15) と (3.16) より $\omega = \pi/\alpha$ となる. $u \in W^{1,\infty}\left(B\left(x_0,r_0\right)\cap\Omega;\mathbb{R}\right)$ のためには、(3.18) より、 $\omega>1-2/\infty=1$ が満たされる必要がある.よって、 $\alpha<\pi$ を得る.

一方, Γ_1 と Γ_2 が混合境界ならば,(3.17) より $\omega=\pi/(2\alpha)$ となる.(3.18) より, $\omega>1-2/\infty=1$ が満たされる必要がある.よって, $\alpha<\pi/2$ を得る.

3.4 線形弾性問題

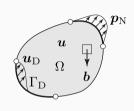


図 3.3: 線形弾性問題

$$egin{aligned} oldsymbol{b} : \Omega &
ightarrow \mathbb{R}^d &
ightarrow \mathbf{\Phi} oldsymbol{1} \ oldsymbol{u}_{
m D} : \Gamma_{
m D} &
ightarrow \mathbb{R}^d &
ightarrow \mathbf{E} oldsymbol{D} \ oldsymbol{p}_{
m N} : \Gamma_{
m N} &
ightarrow \mathbb{R}^d &
ightarrow \mathbf{E} oldsymbol{D} \ oldsymbol{p} \ oldsymbol{U} : \Omega &
ightarrow \mathbb{R}^d &
ightarrow \mathbf{E} oldsymbol{D} \ oldsymbol{V} \ oldsymbol{E} \ oldsymbol{D} \ oldsymbol{D} \ oldsymbol{D} \ oldsymbol{D} \ oldsymbol{D} \ oldsymbol{E} \ oldsymbol{D} \ oldsymb$$

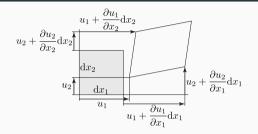


図 3.4: 変位 u と変位勾配 $(abla u^ op)^ op$

$$egin{aligned} \left(oldsymbol{
abla} oldsymbol{u}^{ op}
ight)^{ op} &= oldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight) + oldsymbol{R}\left(oldsymbol{u}
ight) = rac{1}{2}\left\{oldsymbol{
abla} oldsymbol{u}^{ op} + \left(oldsymbol{
abla} oldsymbol{u}^{ op}
ight)^{ op} - oldsymbol{
abla} oldsymbol{u}^{ op}
ight\} \ oldsymbol{R}\left(oldsymbol{u}
ight) = rac{1}{2}\left\{\left(oldsymbol{
abla} oldsymbol{u}^{ op}
ight)^{ op} - oldsymbol{
abla} oldsymbol{u}^{ op}
ight\} \end{aligned}$$

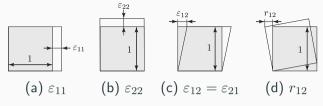
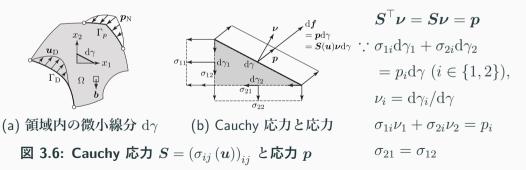


図 3.5: 線形ひずみ $E\left(m{u}
ight)=\left(arepsilon_{ij}\left(m{u}
ight)
ight)_{ij}$ と回転テンソル $R\left(m{u}
ight)=\left(r_{ij}\left(m{u}
ight)
ight)_{ij}$ の成分



構成方程式

$$oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight) = oldsymbol{CE}\left(oldsymbol{u}
ight) = \left(\sum_{(k,l) \in \{1,\cdots,d\}^2} c_{ijkl} arepsilon_{kl} \left(oldsymbol{u}
ight)
ight)_{ij}$$
 (一般化 Hooke 則), $c_{ijkl} = c_{jikl}$ (応力の対称性),

$$c_{ijkl} = c_{jikl}$$
 (応力の対称性),

$$c_{ijkl} = c_{ijlk}$$
 (線形ひずみの対称性) $\Longrightarrow c_{ijkl}$ の数: $3^4 = 81 \rightarrow 36$,

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{A}) \ge \alpha \|\mathbf{A}\|^2$$
 (楕円性),

$$|A \cdot (CB)| \le \beta \|A\| \|B\|$$
 (有界性) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a.e. in Ω ,

$$\exists w = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) : \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})} \quad (弾性ポテンシャルの存在)$$

$$\iff c_{ijkl} = c_{klij} \Longrightarrow c_{ijkl}$$
 の数: $36 \to 21$,

直交異方性 $\Longrightarrow c_{ijkl}$ の数: $21 \to 9$, 等方性 $\Longrightarrow c_{ijkl}$ の数: $9 \to 2$

等方性を仮定して, 次のようにおいたとき,

$$S(\mathbf{u}) = 2\mu_{\mathrm{L}}\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \lambda_{\mathrm{L}}\mathrm{tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{I}$$

 λ_{L} と μ_{L} を Lamé の第1と第2定数とよぶ。 $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)=\sum_{i\in\left\{1,\cdots,d\right\}}e_{ii}\left(\boldsymbol{u}\right)$ を表す。 μ_{L} はせん断弾性係数ともよばれる。また,

$$oldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight) = rac{1 +
u_{ ext{P}}}{e_{ ext{Y}}} oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight) - rac{
u_{ ext{P}}}{e_{ ext{Y}}} ext{tr}\left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight)
ight) oldsymbol{I}$$

 e_Y と ν_P を縦弾性係数あるいは Young 率と Poisson 比とよぶ. その他に、 体積弾性率 k_D も使われる. これらの定数に関して、次の関係などが成り立つ.

$$k_{\rm b} = \lambda_{\rm L} + \frac{2\mu_{\rm L}}{3}, \quad e_{\rm Y} = 2\mu_{\rm L} (1 + \nu_{\rm P}), \quad \lambda_{\rm L} = \frac{2\mu_{\rm L}\nu_{\rm P}}{1 - 2\nu_{\rm P}}$$

力のつり合い方程式

力のつり合い方程式は楕円型偏微分方程式となる.

$$\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \varepsilon \qquad \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \varepsilon$$

$$\sigma_{11} \leftarrow b_1 \qquad \sigma_{12} \qquad \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \varepsilon$$

$$\sigma_{12} \leftarrow b_1 \qquad \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \varepsilon$$

$$\sigma_{21} \leftarrow \sigma_{22} \qquad \sigma_{22}$$

図 3.7: 力のつり合い
$$(\epsilon \ll 1)$$

$$d=2$$
 次元の場合
$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + b_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 = 0$$

$$d \in \{2,3\} \ \text{次元の場合}$$

$$-oldsymbol{
abla}^ op oldsymbol{S}(oldsymbol{u}) = oldsymbol{b}^ op$$

線形弾性問題

問題 3.10 (線形弾性問題)

$$\boldsymbol{b}:\Omega \to \mathbb{R}^d \ (\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d \in \{2,3\}),\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}:\Gamma_{\mathrm{D}} \to \mathbb{R}^d \ (\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega),\ \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}:\Gamma_{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}^d \ (\Gamma_{\mathrm{N}} = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_{\mathrm{D}}) \$$
が与えられたとき、次を満たす $\boldsymbol{u}:\Omega \to \mathbb{R}^d$ を求めよ.

$$-\boldsymbol{\nabla}^{\top}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{b}^{\top} \quad \text{in } \Omega, \tag{3.19}$$

$$S\left(u\right)
u = p_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \tag{3.20}$$

$$u = u_{\mathrm{D}}$$
 on Γ_{D} (3.21)

弱形式

$$U = \left\{ \boldsymbol{v} \in H^{1}\left(\Omega; \mathbb{R}^{d}\right) \mid \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{d}} \text{ on } \Gamma_{D} \right\}$$
(3.22)

とおく. (3.19) の両辺に任意の $v \in U$ をかけて Ω で積分すれば,

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{\nabla}^{\top} \mathbf{S}(\mathbf{u})) \mathbf{v} dx = -\int_{\Gamma_{N}} (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{\nu}) \cdot \mathbf{v} d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx$$
$$= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx$$
(3.23)

Gauss-Green の定理と $\Gamma_{
m D}$ 上で v=0 が使われた. (3.20) も同様にして

$$\int_{\Gamma_{N}} (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \, \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma = \int_{\Gamma_{N}} \boldsymbol{p}_{N} \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma$$
 (3.24)

(3.23) に (3.24) を代入すれば、線形弾性問題の弱形式を得る.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \, dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \, dx + \int_{\Gamma_{N}} \boldsymbol{p}_{N} \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma$$

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \, dx, \tag{3.25}$$

$$l(\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \, dx + \int_{\Gamma_{N}} \boldsymbol{p}_{N} \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma$$
(3.26)

問題 3.11 (線形弾性問題の弱形式)

U を (3.22) とおく、 $\boldsymbol{b} \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \in L^2\left(\Gamma_{\mathrm{N}};\mathbb{R}^d\right)$, $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}} \in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ ($\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}}|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$) および $\boldsymbol{C} \in L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d\times d\times d}\right)$ とする、 $a\left(\cdot,\cdot\right)$ と $l\left(\cdot\right)$ をそれぞれ (3.25) と (3.26) とする、このとき、次を満たす $\boldsymbol{u} \in U\left(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}}\right)$ を求めよ.

$$a\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right) = l\left(\boldsymbol{v}\right) \quad \forall \boldsymbol{v} \in U$$

例題 3.12 (線形弾性問題の解の一意存在)

問題 3.11 において、 $|\Gamma_{\rm D}|>0$ のとき、解 $\tilde{u}=u-\tilde{u}_{\rm D}\in U$ は一意に存在することを示せ、

(解答) Poisson 問題 (例題 3.7) と同様,Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つ. ただし,Hölder の不等式の代わりに **Korn の第2不等式**が使われ,

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H^{1}(\Omega;\mathbb{R}^{d})}^{2} \leq c \|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\|_{L^{2}(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})}^{2} \quad \forall \boldsymbol{v} \in U$$

が成り立つ. a の強圧性は、この不等式と C の楕円性より、

$$a\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right) = \int_{\Omega} \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}\right) \cdot \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}\right)\right) \, \mathrm{d}x \ge c_1 \left\|\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}\right)\right\|_{L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}\right)}^2 \ge \frac{c_1}{c} \left\|\boldsymbol{v}\right\|_{H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)}^2$$

のように確かめられる.

4. 数値解析の原理

目次

- 4. 数値解析の原理
- 4.1 Galerkin 法
- 4.2 有限要素法

4.1 Galerkin 法

問題 4.1 (1 次元 Poisson 問題 (弱形式))

$$b \in L^2((0,1);\mathbb{R}), p_N \in \mathbb{R}, \tilde{u}_D \in H^1((0,1);\mathbb{R})$$
 に対して

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in U$$

を満たす $u-\tilde{u}_D\in U$ を求めよ. ただし,

$$U = \{ v \in H^1((0,1); \mathbb{R}) \mid v(0) = 0 \},$$

$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x, \quad l(v) = \int_0^1 bv \,\mathrm{d}x + p_\mathrm{N}v \,(1)$$

(強形式)
$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = b$$
 in $(0,1)$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) = p_{\mathrm{N}}$, $u(0) = u_{\mathrm{D}}$

(4.1)

定義 4.2 (近似関数の集合)

 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)^\top \in U^m$ を m 個の 1 次独立な既知関数とする. U に対する近似関数の集合を, $\alpha = (\alpha_i)_i \in \mathbb{R}^m$ を未定乗数として,

$$U_{h} = \left\{ v_{h}\left(\boldsymbol{\alpha}\right) = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \alpha_{i} \phi_{i} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m} \right\}$$

とおく. このとき, ϕ を基底関数とよぶ.

 U_h は U の内積を用いた m 次元の Hilbert 空間になる.

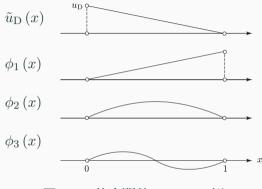


図 4.1: 基底関数 \tilde{u}_{D} , ϕ の例

定義 4.3 (Galerkin 法)

 \tilde{u}_D と U_h を定義 4.2 のとおりとする. $u_h(\alpha) - \tilde{u}_D \in U_h$ と $v_h(\beta) \in U_h$ を (4.1) の $u - \tilde{u}_D \in U$ と $v \in U$ に代入すれば, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ を未知ベクトルとする連立 1 次方程式が得られる.その方程式の解 α を用いて,問題 4.1 の近似解を $u_h(\alpha) = \tilde{u}_D + \phi \cdot \alpha$ によって求める方法を Galerkin 法という.

$$a\left(u_{h}\left(\boldsymbol{\alpha}\right),v_{h}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right)=l\left(v_{h}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right)\Longleftrightarrow\boxed{\boldsymbol{\beta}\cdot\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}}\right)=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{l}\quad\forall\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{m}}$$

ただし、 $m{A}=(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,m\}^2}$ 、 $m{a}_{\mathrm{D}}=(a_{\mathrm{D}i})_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ 、 $m{l}=(l_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ とかいて

$$a_{ij} = a\left(\phi_{i}, \phi_{j}\right) = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}\phi_{i}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\phi_{j}}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x, \quad a_{\mathrm{D}i} = a\left(\tilde{u}_{\mathrm{D}}, \phi_{i}\right) = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}\tilde{u}_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\phi_{i}}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x,$$
$$l_{i} = l\left(\phi_{i}\right) = \int_{0}^{1} b\phi_{i} \, \mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}}\phi_{i}\left(1\right)$$

A の正定値性 (と対称性) は、 $a(\cdot,\cdot)$ の強圧性 (と対称性) による.

d 次元 Poisson 問題 (問題 3.2)

近似関数の集合 U_h を定義 4.2 とする. ただし、 ϕ_i の定義域は $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ に変更される. このとき、Galerkin 法による連立 1 次方程式は次のようになる.

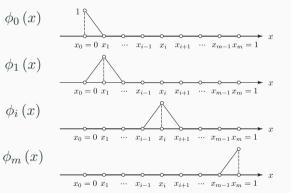
$$oldsymbol{A} oldsymbol{lpha} = oldsymbol{l} - oldsymbol{a}_{
m D} = \hat{oldsymbol{l}}$$

ただし、
$$m{A}=(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2}$$
、 $m{a}_{\mathrm{D}}=(a_{\mathrm{D}i})_{i\in\{1,\dots,m\}}$ 、 $m{l}=(l_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ は

$$a_{ij} = a\left(\phi_{i}, \phi_{j}\right) = \int_{\Omega} \nabla \phi_{i} \cdot \nabla \phi_{j} \, dx, \quad a_{Di} = a\left(\tilde{u}_{D}, \phi_{j}\right) = \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{D} \cdot \nabla \phi_{j} \, dx,$$
$$l_{i} = l\left(\phi_{i}\right) = \int_{\Omega} b\phi_{i} \, dx + \int_{\Gamma_{N}} p_{N}\phi_{i} \, d\gamma$$

4.2 有限要素法

1次元 Poisson 問題 (問題 4.1) に対する Galerkin 法の基底関数を変更する.



Sobolev 埋蔵定理より、

$$X = H^{1}((0,1); \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{D} = C^{0,1}([0,1]; \mathbb{R}),$$

$$\phi_{i} \in \mathcal{D} \subset X$$

$$(i \in \{0,1,\ldots,m\})$$

図 4.2: 1次元有限要素法における基底関数 ϕ_0,\ldots,ϕ_m

Galerkin 法における近似関数を次のように構成する.

$$u_{h}(\bar{\boldsymbol{u}}) = u_{0}\phi_{0} + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} u_{i}\phi_{i} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{D} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_{N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{D} \\ \boldsymbol{\phi}_{N} \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\phi},$$

$$v_{h}(\bar{\boldsymbol{v}}) = v_{0}\phi_{0} + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} v_{i}\phi_{i} = \begin{pmatrix} \bar{v}_{D} \\ \bar{\boldsymbol{v}}_{N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{D} \\ \boldsymbol{\phi}_{N} \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\phi}$$

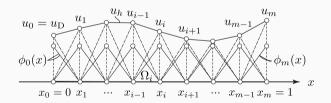


図 4.3: 1次元有限要素法における節点値ベクトル \bar{u}

有限要素法では、近似関数を各有限要素 $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ 上で定義する.

$$arphi_{i(1)}\left(x
ight) = \phi_{i-1}\left(x
ight) = rac{x_{i(2)} - x}{x_{i(2)} - x_{i(1)}},$$
 Ω_i 上の近似関数
$$arphi_{i(2)}\left(x
ight) = \phi_i\left(x
ight) = rac{x - x_{i(1)}}{x_{i(2)} - x_{i(1)}} \qquad u_h\left(\bar{m{u}}_i\right) = \left(arphi_{i(1)} \quad arphi_{i(2)}\right) \left(egin{array}{c} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \end{array} \right)$$

$$(x \in \Omega_i) \qquad \qquad = \varphi_i \cdot \bar{m{u}}_i,$$

$$v_h\left(\bar{m{v}}_i\right) = \left(arphi_{i(1)} \quad arphi_{i(2)}\right) \left(egin{array}{c} v_{i(1)} \\ v_{i(2)} \end{array} \right)$$

$$= \varphi_i \cdot \bar{m{v}}_i$$

$$= \varphi_i \cdot \bar{m{v}}_i$$

$$\bar{m{u}}_i, \, \bar{m{v}}_i \, \mbox{the } \Omega_i \, \mbox{the partial positions}$$

$$\bar{m{u}}_i, \, \bar{m{v}}_i \, \mbox{the partial positions}$$

$$\bar{m{u}}_i, \, \bar{m{v}}_i \, \mbox{the partial positions}$$

図 4.4: 1次元有限要素上の基底関数 $\varphi_{i(1)}$, $\varphi_{i(2)}$

Boole 行列 Z_i を各有限要素 Ω_i に対して次のように定義する.

$$u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i) = \begin{pmatrix} \varphi_{i(1)} & \varphi_{i(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\varphi}_i \cdot (\boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{u}}),$$

$$v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i) = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot (\boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{v}})$$

$$a\left(u_{h}\left(\bar{\boldsymbol{u}}\right),v_{h}\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\right) = \sum_{i\in\left\{1,\dots,m\right\}} \int_{x_{i}\left(1\right)}^{x_{i}\left(2\right)} \frac{\mathrm{d}u_{h}}{\mathrm{d}x} \left(\bar{\boldsymbol{u}}_{i}\right) \frac{\mathrm{d}v_{h}}{\mathrm{d}x} \left(\bar{\boldsymbol{v}}_{i}\right) \, \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{i\in\left\{1,\dots,m\right\}} a_{i} \left(u_{h}\left(\bar{\boldsymbol{u}}_{i}\right),v_{h}\left(\bar{\boldsymbol{v}}_{i}\right)\right)$$

$$egin{aligned} &= ar{oldsymbol{v}} \cdot \left\{ \left(\sum_{i \in \{1,...,m\}} ilde{oldsymbol{A}}_i
ight) ar{oldsymbol{u}}
ight\} = ar{oldsymbol{v}} \cdot \left(ar{oldsymbol{A}} ar{oldsymbol{u}}
ight), \end{aligned}$$

$$a_{i}\left(u_{h}\left(\bar{\boldsymbol{u}}_{i}\right),v_{h}\left(\bar{\boldsymbol{v}}_{i}\right)\right)=\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\left(\boldsymbol{Z}_{i}^{\top}\bar{\boldsymbol{A}}_{i}\boldsymbol{Z}_{i}\bar{\boldsymbol{u}}\right)=\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_{i}\bar{\boldsymbol{u}}\right)$$

 $ar{A}_i\in\mathbb{R}^{2 imes2}$: 有限要素 $i\in\mathcal{E}$ の係数行列, $ar{A}\in\mathbb{R}^{m+1 imes m+1}$: 全体係数行列

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \left(\int_{x_{i(2)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(\alpha)}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(\beta)}}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{x_{i(2)} - x_{i(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l\left(v_{h}\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\right) = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} bv_{h}\left(\bar{\boldsymbol{v}}_{i}\right) \, \mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}}v_{h}\left(\bar{\boldsymbol{v}}_{m}\right) = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} l_{i}\left(v_{h}\left(\bar{\boldsymbol{v}}_{i}\right)\right)$$
$$= \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left\{\sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \left(\tilde{\boldsymbol{b}}_{i} + \delta_{im}\tilde{\boldsymbol{p}}_{m}\right)\right\} = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \tilde{\boldsymbol{l}}_{i}\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}$$

$$l_{i}\left(v_{h}\left(ar{oldsymbol{v}}_{i}
ight)
ight)=ar{oldsymbol{v}}_{i}\cdot\left(ar{oldsymbol{b}}_{i}+\delta_{im}ar{oldsymbol{p}}_{m}
ight)=ar{oldsymbol{v}}_{i}\cdotar{oldsymbol{l}}_{i}=ar{oldsymbol{v}}\cdot\left(oldsymbol{Z}_{i}^{ op}ar{oldsymbol{l}}_{i}
ight)=ar{oldsymbol{v}}\cdot ilde{oldsymbol{l}}_{i}$$

 $ar{l}_i \in \mathbb{R}^2$: 有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の既知項ベクトル, $ar{l} \in \mathbb{R}^{m+1}$: 全体既知項ベクトル

$$\bar{l}_{i} = \begin{pmatrix} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} b\varphi_{i(1)} \, dx \\ \int_{x_{i(2)}}^{x_{i(2)}} b\varphi_{i(2)} \, dx \end{pmatrix} + \delta_{im} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{N} \end{pmatrix} = b \frac{x_{i(2)} - x_{i(1)}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta_{im} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{N} \end{pmatrix}$$

(b が定数のとき) 73/142

(δ_{im} : Kronecker デルタ),

基本境界条件 (Dirichlet 条件) を代入すれば,

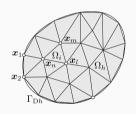
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \mid v_{1} & \cdots & v_{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}_{00}}{\bar{a}_{10}} & \bar{a}_{01} & \cdots & \bar{a}_{0m} \\ \bar{a}_{10} & \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m0} & \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{D} \\ u_{1} \\ \vdots \\ u_{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_{0} \\ l_{1} \\ \vdots \\ l_{m} \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{v}}_{N}^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_{DD} & \bar{A}_{DN} \\ \bar{A}_{ND} & \bar{A}_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{D} \\ \bar{\mathbf{u}}_{N} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{l}_{D} \\ \bar{l}_{N} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{v}}_{N} \in \mathbb{R}^{m}$$

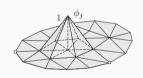
未知ベクトル $\bar{u}_{
m N}$ を次のように求めることができる.

$$ar{oldsymbol{u}}_{ ext{N}} = ar{oldsymbol{A}}_{ ext{NN}}^{-1} \left(ar{oldsymbol{l}}_{ ext{N}} - ar{oldsymbol{u}}_{ ext{D}} ar{oldsymbol{A}}_{ ext{ND}}
ight) = ar{oldsymbol{A}}_{ ext{NN}}^{-1} \hat{oldsymbol{l}}$$

2次元有限要素法

2次元 Poisson 問題 (問題 3.1) に対する有限要素分割と基底関数





 $\begin{array}{c} u_{i(3)} & u_{i(2)} \\ u_{h} & & \\ u_{i(1)} & & \\ \varphi_{i(1)} & & \\ & & \\ & & \\ \boldsymbol{x}_{i(1)} & & \\ \end{array} \boldsymbol{x}_{i(2)}$

図 4.5: 3 角形有限要素 Ω_i 図 4.6: Galerkin 法におけ $(i \in \mathcal{E})$ と節点 x_j $(j \in \mathcal{N})$ る基底関数 ϕ_j $(j \in \mathcal{N})$

図 4.7: Ω_i $(i \in \mathcal{E})$ 上の基底関数 $\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(2)}, \varphi_{i(3)}$

高次有限要素

規準領域 Ξ 上で定義された 2 次要素

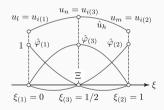


図 4.8: 1次元2次要素

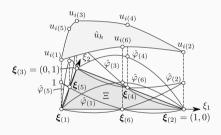


図 4.9: 3角形2次要素

5. 基本的な疑問点に対する回答例

目次

- 5. 基本的な疑問点に対する回答例
- 5.1 Q-1 線形空間 *X* はどのように定義されるのか?
- 5.2 Q-2 f_i の勾配 g_i と Hesse 形式 h_i はどのように得られるのか?
- 5.3 Q-3 勾配法と Newton 法はどのように定義されるのか?
- 5.4 Q-4 探索ベクトルが許容集合 D に入る条件は何か?

5.1 Q-1 線形空間 X はどのように定義されるのか?

偏微分方程式の境界値問題を定義するためには、領域は Lipschitz 領域でなければならない.

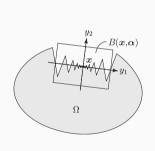
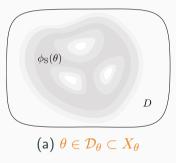


図 5.1: Lipschitz 領域



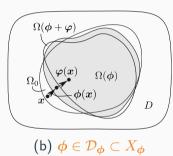


図 5.2: 2種類の問題における設計変数

$$\Rightarrow X_{\theta}\supset C^{0,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)=W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)\text{, }X_{\phi}\supset C^{0,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}^{d}\right)=W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right).$$

勾配法を使うためには $X \in \{X_{\theta}, X_{\phi}\}$ は Hilbert 空間でなければならない.

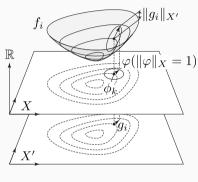


図 5.3: 勾配 q; の定義

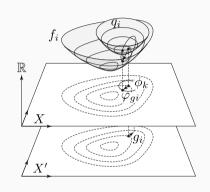


図 5.4: 勾配法

$$\Rightarrow \left| X_{\theta} = H^{1}\left(\Omega; \mathbb{R}\right) = W^{1,2}\left(\Omega; \mathbb{R}\right) \right|, \left| X_{\phi} = H^{1}\left(\Omega; \mathbb{R}^{d}\right) = W^{1,2}\left(\Omega; \mathbb{R}^{d}\right) \right|.$$

$$X_{\phi} = H^{1}\left(\Omega; \mathbb{R}^{d}\right) = W^{1,2}\left(\Omega; \mathbb{R}^{d}\right)$$

\mathbf{Q} -1-1 許容集合 $\mathcal{D} \subset X$ のための条件

 $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}_{\theta}, \mathcal{D}_{\phi}\}$ は $X \in \{X_{\theta}, X_{\phi}\}$ 上で**コンパクト**でなければならない.

$$X_{\theta} = H^{1}\left(D; \mathbb{R}\right), \quad Y_{\theta} = X_{\theta} \cap \left[H^{2}\left(D; \mathbb{R}\right) \cap C^{0,1}\left(\bar{D}; \mathbb{R}\right)\right] \subseteq X_{\theta},$$

$$\mathcal{D}_{\theta} = \left\{\theta \in Y_{\theta} \mid \left\|\theta\right\|_{H^{2} \cap C^{0,1}\left(\bar{D}; \mathbb{R}\right)} \leq \beta\right\}.$$

$$X_{\phi} = \left\{\phi \in H^{1}\left(D; \mathbb{R}^{d}\right) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{d}} \text{ on } \partial D\right\},$$

$$Y_{\phi} = X_{\phi} \cap \left[H^{2}\left(D; \mathbb{R}^{d}\right) \cap C^{0,1}\left(\bar{D}; \mathbb{R}^{d}\right) \right] \in X_{\phi},$$

$$\mathcal{D}_{\phi} = \left\{ \phi \in Y_{\phi} \mid |\phi|_{C^{0,1}\left(\bar{D}; \mathbb{R}^{d}\right)} \leq \sigma, \|\phi\|_{H^{2} \cap C^{0,1}\left(\bar{D}; \mathbb{R}^{d}\right)} \leq \beta \right\}$$

$$\left(\sigma \in (0,1) \ \ \xi \ \beta \ \ \text{は正定数}\right)$$

は Rellich−Kondrachov のコンパクト埋蔵定理で保証される.

評価関数 f_i の勾配 g_i ($i\in\mathcal{I}$) が入る線形空間

設計変数を $\phi \in \mathcal{D} \subset X$ とかく.

Fréchet 微分の定義より、汎関数 $f_i(\phi)$ の Taylor 展開は

$$f_i(\phi + \varphi) = f_i(\phi) + f'_i(\phi)[\varphi] + o(\|\varphi\|_X)$$

有界線形汎関数 $f_i'(\phi)[\cdot] = \langle g_i(\phi), \cdot \rangle$ を勾配とよぶ.

 \Longrightarrow 勾配 g_i は X の双対空間 (X 上の有界線形汎関数の全体集合) X' の要素

Q-1-3 評価関数 f_i の Hesse 形式 h_i ($i\in\mathcal{I}$) が入る線形空間

2階 Fréchet 微分の定義より、 $\underline{\varphi_1} \in X$ を固定したとき、汎関数 $\langle g_i(\phi), \varphi_1 \rangle$ の Taylor 展開は

$$\langle g_i(\phi + \varphi_2), \varphi_1 \rangle = \langle g_i(\phi), \varphi_1 \rangle + h_i(\phi) [\varphi_1, \varphi_2] + o(\|\varphi_2\|_X)$$

有界双線形汎関数 $f_i''(\phi)[\cdot,\cdot] = h_i(\phi)[\cdot,\cdot]$ を Hesse 形式とよぶ.

 \Longrightarrow Hesse 形式 h_i はX 上の有界双線形汎関数の全体集合 $\mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$ の要素

5.2 Q-2 f_i の勾配 g_i と Hesse 形式 h_i はどのように得られるのか?

抽象的変分問題 (問題 3.5) に設計変数 $\phi \in \mathcal{D}$ を組み込む.

問題 5.1 (*ϕ* に対する抽象的変分問題)

U を実 Hilbert 空間とする. $\phi \in \mathcal{D}$ に対して $a(\phi): U \times U \to \mathbb{R}$ を U 上の 強圧的かつ有界な双 1 次形式, $l(\phi) = l(\phi)(\cdot) = \langle l(\phi), \cdot \rangle \in U'$ とする. 次 を満たす $u \in U$ を求めよ.

$$a(\phi)(u,v) = l(\phi)(v) \quad \forall v \in U$$

問題 5.2 (抽象的最適設計問題)

 $(\phi,u)\in\mathcal{D} imes\mathcal{S}$ に対して、 $f_i:\mathcal{D} imes\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、次を満たす ϕ を求めよ.

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \left\{ f_i \left(\phi, u \right) \mid u \in \mathcal{S} :$$
問題 5.1 の解 $\right\}$

問題 5.2 の Lagrange 関数

$$\mathcal{L}_{i}\left(\phi, u, v_{i}\right) = f_{i}\left(\phi, u\right) - a\left(\phi\right)\left(u, v_{i}\right) + l\left(\phi\right)\left(v_{i}\right) = f_{i}\left(\phi, u\right) + \mathcal{L}_{S}\left(\phi, u, v_{i}\right)$$

 $v_i \in U$ は f_i のために定義された問題 5.1 の Lagrange 乗数 である.

\mathbf{Q} -2-1 勾配 g_i の求め方

 $\mathcal{L}_i(\phi, u, v_i)$ の Fréchet 微分

$$\mathcal{L}'_{i}(\phi, u, v_{i}) [\varphi, \hat{u}, \hat{v}_{i}] = \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_{i}) [\varphi] + \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_{i}) [\hat{u}] + \mathcal{L}_{iv_{i}}(\phi, u, v_{i}) [\hat{v}_{i}],$$

$$\mathcal{L}_{iv_{i}}(\phi, u, v_{i}) [\hat{v}_{i}] = \mathcal{L}_{S}(\phi, u, \hat{v}_{i}) = 0 \quad \forall \hat{v}_{i} \in U$$

$$\iff a(\phi) (u, \hat{v}_{i}) = l(\phi) (\hat{v}_{i}) \quad \forall \hat{v}_{i} \in U \text{ (問題 5.1)},$$

$$\mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_{i}) [\hat{u}] = f_{iu}(\phi, u) [\hat{u}] + \mathcal{L}_{Su}(\phi, u, v_{i}) [\hat{u}] \quad \forall \hat{u} \in U \text{ (随伴問題)}$$

$$\iff a(\phi) (\hat{u}, v_{i}) = -f_{iu}(\phi, u) [\hat{u}] \quad \forall \hat{u} \in U,$$

$$\mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_{i}) [\varphi] = \langle g_{i}, \varphi \rangle$$

(1) SIMP 型線形弾性問題

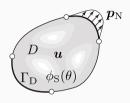


図 5.5: SIMP 型線形弾性体

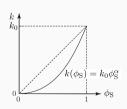


図 5.6: SIMP モデル $(\alpha > 1)$

SIMP (solid isotropic material with penalization)

問題 5.3 (SIMP 型線形弾性問題)

次を満たす $u: D \to \mathbb{R}^d$ を求めよ.

$$\begin{split} -\boldsymbol{\nabla}^{\top}\left(\phi_{\mathrm{S}}^{\alpha}\left(\theta\right)\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\right) &= \boldsymbol{b}^{\top}\left(\theta\right) \quad \text{in } D, \\ \phi_{\mathrm{S}}^{\alpha}\left(\theta\right)\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}} \end{split}$$

SIMP 型平均コンプライアンス最小化問題

平均コンプライアンスと体積制約関数

$$f_{0}(\theta, \boldsymbol{u}) = \int_{D} \boldsymbol{b}(\theta) \cdot \boldsymbol{u} \, dx + \int_{\Gamma_{N}} \boldsymbol{p}_{N} \cdot \boldsymbol{u} \, d\gamma - \int_{\Gamma_{D}} \boldsymbol{u}_{D} \cdot (\phi^{\alpha}(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma,$$
$$f_{1}(\theta) = \int_{D} (\phi_{S}(\theta) - c_{1}) \, dx$$

問題 5.4 (SIMP 型平均コンプライアンス最小化問題)

次を満たす θ を求めよ.

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}_{\theta}} \left\{ f_{0}\left(\theta, \boldsymbol{u}\right) \mid f_{1}\left(\theta\right) \leq 0, \ \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{D} \in \mathcal{S}_{\theta} \ は問題 5.3 \ \boldsymbol{op} \right\}$$

$$\mathcal{L}_{S}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{D} \left(-\phi^{\alpha}(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{b}(\theta) \cdot \boldsymbol{v} \right) dx + \int_{\Gamma_{N}} \boldsymbol{p}_{N} \cdot \boldsymbol{v} d\gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_{D}} \left\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{D}) \cdot (\phi^{\alpha}(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{v} \cdot (\phi^{\alpha}(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) \right\} d\gamma,$$

$$\mathcal{L}_{0}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) = f_{0}(\theta, \boldsymbol{u}) + \mathcal{L}_{S}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}),$$

$$= \int_{D} \left\{ -\phi^{\alpha}(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_{0}) + \boldsymbol{b}(\theta) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_{0}) \right\} dx$$

 $+\int_{\Gamma} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_{0}) \, \mathrm{d}\gamma$

 $+\int_{\Gamma} \left\{ \left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{D}} \right) \cdot \left(\phi^{lpha} \left(heta
ight) \mathbf{S} \left(\mathbf{v}_{0}
ight) \mathbf{
u}
ight) \right\}$

 $+ (\mathbf{v_0} - \mathbf{u_D}) \cdot (\phi^{\alpha}(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{\nu}) d\gamma$

$$\mathcal{L}'_{0}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\vartheta, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_{0}] = \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\vartheta] + \mathcal{L}_{0\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{u}}]$$

$$+ \mathcal{L}_{0\boldsymbol{v}_{0}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{v}}_{0}] \quad \forall (\vartheta, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_{0}) \in X \times U \times U,$$

$$\mathcal{L}_{0\boldsymbol{v}_{0}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{v}}_{0}] = \mathcal{L}_{S\boldsymbol{v}_{0}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{v}}_{0}] = \mathcal{L}_{S}(\theta, \boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{v}}_{0}) \quad \forall \hat{\boldsymbol{v}}_{0} \in U,$$

$$\mathcal{L}_{0\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{u}}] = \mathcal{L}_{S}(\theta, \boldsymbol{v}_{0}, \hat{\boldsymbol{u}}) \quad \forall \hat{\boldsymbol{u}} \in U \Longrightarrow \boldsymbol{v}_{0} = \boldsymbol{u} \text{ (自己随伴)},$$

$$\mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\vartheta] = \int_{D} \left\{ \boxed{\boldsymbol{b}' \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_{0}) - \alpha \phi^{\alpha - 1} \phi' \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_{0})} \right\} \vartheta \, \mathrm{d}x$$

$$= \langle \boldsymbol{g}_{0}, \vartheta \rangle,$$

$$f'_{1}(\theta) [\vartheta] = \int_{D} \boxed{\phi'} \vartheta \, \mathrm{d}x = \langle \boldsymbol{g}_{1}, \vartheta \rangle$$

(2) 領域変動型線形弾性問題

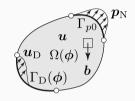


図 5.7: 線形弾性体

簡単のために、 Γ_{p0} は変動しないと仮定する.

問題 5.5 (領域変動型線形弾性問題)

次を満たす $u: \Omega(\phi) \to \mathbb{R}^d$ を求めよ.

$$egin{aligned} -oldsymbol{
abla}^ op oldsymbol{S}\left(oldsymbol{\phi}, oldsymbol{u}
ight) &= oldsymbol{b}^ op \left(oldsymbol{\phi}
ight) & ext{in } \Omega\left(oldsymbol{\phi}
ight), \ oldsymbol{S}\left(oldsymbol{\phi}, oldsymbol{u}
ight) oldsymbol{
u} &= oldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} & ext{on } \Gamma_{ ext{N}}\left(oldsymbol{\phi}
ight) ackslash ar{\Gamma}_{p0}, \ oldsymbol{u} &= oldsymbol{u}_{ ext{D}}\left(oldsymbol{\phi}
ight) & ext{on } \Gamma_{ ext{D}}\left(oldsymbol{\phi}
ight). \end{aligned}$$

領域変動型平均コンプライアンス最小化問題

平均コンプライアンスと体積制約関数

$$f_{0}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \, dx + \int_{\Gamma_{p0}} \boldsymbol{p}_{N} \cdot \boldsymbol{u} \, d\gamma - \int_{\Gamma_{D}(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{u}_{D} \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma$$
$$= \hat{l}(\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{u}),$$
$$f_{1}(\boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (1 - c_{1}) \, dx$$

問題 5.6 (領域変動型平均コンプライアンス最小化問題)

次を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ.

$$\min_{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{\phi}}} \left\{ f_0 \left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u} \right) \mid f_1 \left(\boldsymbol{\phi} \right) \leq 0, \ \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_D \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{\phi}} : 問題 5.5 \ \boldsymbol{O}解 \right\}$$

$$\mathcal{L}_{S}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(-\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\right) dx + \int_{\Gamma_{p0}} \boldsymbol{p}_{N} \cdot \boldsymbol{v} d\gamma + \int_{\Gamma_{D}(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{D}\right) \cdot \left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{v}\right) \boldsymbol{\nu}\right) + \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{\nu}\right) \right\} d\gamma,$$

$$+\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(oldsymbol{\phi})}\left\{\left(oldsymbol{u}-oldsymbol{u}_{\mathrm{D}}
ight)\cdot\left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}
ight)
olimits+oldsymbol{v}\cdot\left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight)
olimits+oldsymbol{u}\cdot\left(oldsymbol{u}
ight)
olimits+oldsymbol{v}\cdot\left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight)
olimits+oldsymbol{v}\cdot\left(oldsymbol{u}\cdotolds$$

 $= \int_{\mathcal{O}(X)} \left(-\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) \right) dx$

$$+ \int_{\Gamma_{D}(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_{0}) \, \mathrm{d}\gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \left\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_{0}) \, \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_{0} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \, \boldsymbol{\nu}) \right\} \mathrm{d}\gamma$$

$$\mathcal{L}_{0}'(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\varphi, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_{0}] = \mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\varphi] + \mathcal{L}_{0\boldsymbol{u}}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{u}}]
+ \mathcal{L}_{0\boldsymbol{v}_{0}}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{v}}_{0}] \quad \forall (\varphi, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_{0}) \in X \times U \times U,
\mathcal{L}_{0\boldsymbol{v}_{0}}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{v}}_{0}] = \mathcal{L}_{S\boldsymbol{v}_{0}}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{v}}_{0}] = \mathcal{L}_{S}(\phi, \boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{v}}_{0}) \quad \forall \hat{\boldsymbol{v}}_{0} \in U,
\mathcal{L}_{0\boldsymbol{u}}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\hat{\boldsymbol{u}}] = \mathcal{L}_{S}(\phi, \boldsymbol{v}_{0}, \hat{\boldsymbol{u}}) \quad \forall \hat{\boldsymbol{u}} \in U \Longrightarrow \boldsymbol{v}_{0} = \boldsymbol{u} \text{ (自己随伴)},
\mathcal{L}_{0\phi}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{0}) [\varphi] = \begin{cases} -\int_{\Omega(\phi)} (\boldsymbol{G}_{\Omega 0} \cdot \nabla \varphi^{\top} + g_{\Omega 0} \nabla \cdot \varphi) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{g}_{0}, \varphi \rangle \\ (6 \operatorname{id} \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} & (\mathbf{u} \otimes \boldsymbol{u} & (\mathbf{u} \otimes \boldsymbol{u} \otimes$$

$$egin{aligned} oldsymbol{G}_{\Omega 0} &= 2 oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight) oldsymbol{
aligned} oldsymbol{,} g_{\Omega 0} &= - oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight) \cdot oldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight) + 2 oldsymbol{b} \cdot oldsymbol{u}
ight) oldsymbol{v} \ oldsymbol{g}_{\partial \Omega 0} &= \left(- oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight) \cdot oldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight) + 2 oldsymbol{b} \cdot oldsymbol{u}
ight) oldsymbol{v} \ oldsymbol{v} \end{aligned}$$

$$f_{1}'(\phi)[\varphi] = \begin{cases} \int_{\Omega(\phi)} g_{\Omega 1} \nabla \cdot \varphi \, dx = \langle g_{1}, \varphi \rangle & (領域積分型) \\ \int_{\partial \Omega(\phi)} \bar{g}_{\partial \Omega 1} \cdot \varphi \, d\gamma = \langle \bar{g}_{1}, \varphi \rangle & (境界積分型) \end{cases}$$

 $q_{\Omega 1}=1, \; \bar{q}_{\partial \Omega 1}=\nu$

上記の結果を得るために、次に示すような汎関数の形状微分 (領域積分型/境界積分型) の公式が使われた.

(参考) 領域変動とともに変動する関数の形状微分と形状偏微分

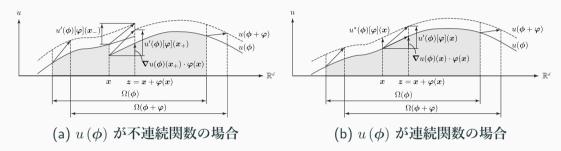


図 5.8: 領域変動とともに変動する関数 $u(\phi)$ の形状微分 $u'(\phi)[\varphi]$ と形状偏微分 $u^*(\phi)[\varphi]$

(参考) 関数の形状微分を用いた公式 (領域積分型)

Proposition 9.3.4 [1]

$$h \in C^{1}\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d}; \mathbb{R}\right), \quad u'(\phi)\left[\varphi\right] \not\succeq u' \succeq h \preceq.$$

$$f\left(\phi + \varphi, u\left(\phi + \varphi\right), \nabla_{z}u\left(\phi + \varphi\right)\right)$$

$$= \int_{\Omega(\phi + \varphi)} h\left(u\left(\phi + \varphi\right), \nabla_{z}u\left(\phi + \varphi\right)\right) dz \quad \forall \varphi \in Y_{\phi},$$

$$f'\left(\phi, u, \nabla u\right)\left[\varphi\right]$$

$$= \int_{\Omega(\phi)} \left\{h_{u}\left(u, \nabla u\right)\left[u'\right] + h_{\nabla u}\left(u, \nabla u\right)\left[\nabla u' - \left(\nabla \varphi^{\top}\right)\nabla u\right] + h\left(u, \nabla u\right)\nabla \cdot \varphi\right\} dx$$

Proposition 9.3.4 で得られた公式を $f'(\phi, u, \nabla u)[\varphi] = f'(\phi, u)[\varphi, u']$ とかいて、次のように再編して、公式として用いる。

$$f'(\boldsymbol{\phi}, u) \left[\boldsymbol{\varphi}, u'\right] = f_{\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u) \left[\boldsymbol{\varphi}\right] + f_{u}(\boldsymbol{\phi}, u) \left[u'\right],$$

$$f_{\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u) \left[\boldsymbol{\varphi}\right] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ h_{\nabla u}(u, \nabla u) \left[-\left(\nabla \boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) \nabla u\right] + h(u, \nabla u) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\} dx,$$

$$f_{u}(\boldsymbol{\phi}, u) \left[u'\right] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ h_{u}(u, \nabla u) \left[u'\right] + h_{\nabla u}(u, \nabla u) \left[\nabla u'\right] \right\} dx$$

例えば、領域積分型の形状微分 $\langle g_0, \varphi \rangle$ を得るために、次の変換が使われた。

$$egin{aligned} &-\left(S\left(oldsymbol{u}
ight)\cdot oldsymbol{E}\left(oldsymbol{v}_{0}
ight)_{oldsymbol{\phi}'}\left[oldsymbol{arphi}
ight] = -\left(oldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight)\cdot oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}_{0}
ight)^{ op}oldsymbol{V}_{oldsymbol{v}_{0}}^{ op}oldsymbol{V}_{0}^{ op}oldsymbol{V}_{0}^{ op}oldsymbol{V}_{0}^{ op}oldsymbol{V}_{0}^{ op}ig) + S\left(oldsymbol{u}
ight)\cdot oldsymbol{V}oldsymbol{arphi}^{ op}oldsymbol{V}_{0}^{ op}ig) - S\left(oldsymbol{u}
ight)\cdot oldsymbol{E}\left(oldsymbol{v}_{0}
ight)\left(oldsymbol{\nabla}\cdotoldsymbol{arphi}
ight) \\ &= \left(oldsymbol{V}oldsymbol{arphi}^{ op}oldsymbol{V}oldsymbol{u}^{ op}ig)\cdot oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}_{0}
ight) + S\left(oldsymbol{u}\right)\cdot \left(oldsymbol{\nabla}oldsymbol{arphi}^{ op}oldsymbol{\nabla}oldsymbol{v}_{0}^{ op}ig) - S\left(oldsymbol{u}\right)\cdot oldsymbol{E}\left(oldsymbol{v}_{0}
ight)\left(oldsymbol{\nabla}\cdotoldsymbol{arphi}
ight) \\ &= \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight)\left(oldsymbol{\nabla}oldsymbol{v}_{0}^{ op}\right) + \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}_{0}
ight)\left(oldsymbol{\nabla}oldsymbol{v}_{0}^{ op}
ight) \\ &= \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight)\left(oldsymbol{\nabla}oldsymbol{v}_{0}^{ op}
ight) + \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}_{0}
ight)\left(oldsymbol{\nabla}oldsymbol{v}_{0}^{ op}
ight) \\ &= \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}\right)\left(oldsymbol{\nabla}oldsymbol{v}_{0}^{ op}\right) + \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}_{0}
ight)\left(oldsymbol{v}_{0}^{ op}\right)\right) \\ &= \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}\right)\left(oldsymbol{v}_{0}^{ op}\right) + oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}_{0}^{ op}\right) \\ &= \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}\right)\left(oldsymbol{v}\right) + oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}\right) \\ &= \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}\right)\left(oldsymbol{v}\right) + oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}\right) + oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}\right) \\ &= \left(oldsymbol{S}\left(oldsymbol{v}\right)\left(oldsy$$

$$(\cdot)^{\mathrm{s}}$$
 は $\left((\cdot)^{\mathsf{T}} + (\cdot)\right)/2$ を表す.

(参考) 関数の形状偏微分を用いた公式 (境界積分型)

Proposition 9.3.10 [1]

$$h \in C^{1}\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d}; \mathbb{R}\right), \quad u^{*}\left(\phi\right)\left[\varphi\right] \stackrel{\mathcal{E}}{\mathcal{E}} u^{*} \stackrel{\mathcal{E}}{\mathcal{D}} \stackrel{\mathcal{A}}{\mathcal{A}}.$$

$$f\left(\phi + \varphi, u\left(\phi + \varphi\right), \nabla_{z}u\left(\phi + \varphi\right)\right)$$

$$= \int_{\Omega(\phi + \varphi)} h\left(u\left(\phi + \varphi\right), \nabla_{z}u\left(\phi + \varphi\right)\right) dz \quad \forall \varphi \in Y_{\phi},$$

$$f'\left(\phi, u, \nabla u\right)\left[\varphi\right]$$

$$= \int_{\Omega(\phi)} \left\{h_{u}\left(u, \nabla u\right)\left[u^{*}\right] + h_{\nabla u}\left(u, \nabla u\right)\left[\nabla u^{*}\right]\right\} dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega(\phi)} h\left(u, \nabla u\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\gamma$$

Proposition 9.3.10 で得られた公式を $f'(\phi, u, \nabla u)[\varphi] = f'(\phi, u)[\varphi, u^*]$ とかいて、次のように再編して、公式として用いる。

$$f'(\boldsymbol{\phi}, u) [\boldsymbol{\varphi}, u^*] = f_{\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u) [\boldsymbol{\varphi}] + f_u(\boldsymbol{\phi}, u) [u^*],$$

$$f_{\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u) [\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} h(u, \boldsymbol{\nabla}u) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma,$$

$$f_u(\boldsymbol{\phi}, u) [u^*] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \{h_{\mathbf{u}}(u, \boldsymbol{\nabla}u) [\mathbf{u}^*] + h_{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}}(u, \boldsymbol{\nabla}u) [\boldsymbol{\nabla}u^*]\} \, dx$$

境界積分に対する **関数の形状微分**を用いた公式と**関数の形状偏微分**を用いた 公式も求めることができる [1, Propositions 9.3.7, 9.3.13].

\mathbf{Q} -2-2 Hesse 形式 h_i の求め方

抽象的最適設計問題 (問題 5.2) に対して、評価関数 f_i の Hesse 形式を求める方法 (概要) を紹介する.

 $h_i(\phi,u,v_i)\in\mathcal{L}^2(X\times X;\mathbb{R})$ とかく (Q-1-3). もしも, $\phi\in X$ の任意変動 $\varphi_1,\varphi_2\in X$ に対して、抽象的変分問題 (問題 5.1) を満たす $u\in U$ の変動 $\hat{v}_1,\hat{v}_2\in U$ が得られれば、次のようにかける.

$$\begin{split} h_{i}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\varphi_{1},\varphi_{2}\right] \\ &=\left(\mathcal{L}_{i\phi}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\varphi_{1}\right]+\mathcal{L}_{iu}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\hat{v}_{1}\right]\right)_{\phi}\left[\varphi_{2}\right] \\ &+\left(\mathcal{L}_{i\phi}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\varphi_{1}\right]+\mathcal{L}_{iu}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\hat{v}_{1}\right]\right)_{u}\left[\hat{v}_{2}\right] \\ &=\mathcal{L}_{i\phi\phi}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\varphi_{1},\varphi_{2}\right]+\mathcal{L}_{iu\phi}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\hat{v}_{1},\varphi_{2}\right] \\ &+\mathcal{L}_{i\phiu}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\varphi_{1},\hat{v}_{2}\right]+\mathcal{L}_{iuu}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\hat{v}_{1},\hat{v}_{2}\right] \end{split}$$

(1) 微分の連鎖則に基づく Hesse 形式の求め方 (条件つき)

もしも,

$$\mathscr{L}_{S\phi u}(\phi, u, v)[\varphi_j, \hat{v}_j] = 0 \quad \varphi_j \in X$$

から $\hat{v}_j = v'\left(\phi\right)\left[\varphi_j\right]$ $\left(j \in \{1,2\}\right)$ を陽に与える式を求めることができれば、

$$h_{i}(\phi, u, v_{i}) [\varphi_{1}, \varphi_{2}] = \mathcal{L}_{i\phi\phi}(\phi, u, v_{i}) [\varphi_{1}, \varphi_{2}] + \mathcal{L}_{iu\phi}(\phi, u, v_{i}) [v'(\phi) [\varphi_{1}], \varphi_{2}] + \mathcal{L}_{i\phi u}(\phi, u, v_{i}) [\varphi_{1}, v'(\phi) [\varphi_{2}]]$$

によって、 f_i の Hesse 形式を求めることができる.

密度変動型では、b は θ の関数ではないとき、上記仮定が成り立ち、 $h_0(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0) [\vartheta_1, \vartheta_2]$

$$= \int_{D} \left\{ 2 \frac{\left(\phi^{\alpha}(\theta)\right)'^{2}}{\phi^{\alpha}(\theta)} - \left(\phi^{\alpha}(\theta)\right)'' \right\} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_{0}) \vartheta_{1} \vartheta_{2} \, dx,$$

$$h_{1}(\theta) \left[\vartheta_{1}, \vartheta_{2}\right] = \int_{D} \phi''(\theta) \, \vartheta_{1} \vartheta_{2} \, dx$$

領域変動型では、b=0 のとき、上記仮定が成り立ち、

 $h_1(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2]=0$

$$egin{aligned} h_0\left(oldsymbol{\phi},oldsymbol{u},oldsymbol{u}
ight)\left[2oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight)\cdotoldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight)\left[2oldsymbol{S}\left(oldsymbol{u}
ight)\cdotoldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight)oldsymbol{G}\left(oldsymbol{
aligned} \cdotoldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight)^{ op}
ight)\cdotiggl\{oldsymbol{
aligned} oldsymbol{arphi}oldsymbol{arphi}^{ op}oldsymbol{
aligned} oldsymbol{v}_1oldsymbol{u}\cdotoldsymbol{E}\left(oldsymbol{u}
ight)^{ op}iggr\{oldsymbol{
aligned} oldsymbol{G}\left(oldsymbol{u}
ight)^{ op}iggr\} iggr\{oldsymbol{
aligned} oldsymbol{
aligned} oldsymbol{u}\cdotoldsymbol{
aligned} oldsymbol{u}\cdotoldsymbol{
aligned} oldsymbol{u}\cdotoldsymbol{
aligned} oldsymbol{u}\cdotoldsymbol{
aligned} oldsymbol{u}\cdotoldsymbol{
aligned} oldsymbol{
aligned} oldsymbol{$$

$$+ \left(S\left(\boldsymbol{u} \right) \left(\nabla \boldsymbol{u}^{\top} \right)^{\top} \right) \cdot \left\{ \nabla \varphi_{2}^{\top} \nabla \varphi_{1}^{\top} + \nabla \varphi_{1}^{\top} \nabla \varphi_{2}^{\top} + \nabla \varphi_{2}^{\top} \left(\nabla \varphi_{1}^{\top} \right)^{\top} \right. \\ + \left. \nabla \varphi_{1}^{\top} \left(\nabla \varphi_{2}^{\top} \right)^{\top} - 4 \nabla \varphi_{2}^{\top} \nabla \cdot \varphi_{1} - 4 \nabla \varphi_{1}^{\top} \nabla \cdot \varphi_{2} \right\} \right] \mathrm{d}x, \tag{5.3}$$

(5.4)

(5.1)

(5.2)

(2) Lagrange 乗数法による Hesse 形式の求め方

 $\langle g_i(u,v_i), \varphi_1 \rangle$ $(\varphi_1 \in X)$ に対する Lagrange 関数を次のようにおく.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}i}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)=\left\langle g_{i}\left(u,v_{i}\right),\varphi_{1}\right\rangle +\mathcal{L}_{\mathrm{S}}\left(\phi,u,w_{i}\right)+\mathcal{L}_{\mathrm{A}i}\left(\phi,v_{i},z_{i}\right),$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{A}i}\left(\phi,v_{i},z_{i}\right)=\mathcal{L}_{iu}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[z_{i}\right]\longleftarrow\left($$
随伴問題 の Lagrange 関数)

 $w_i \in U$ と $z_i \in U$ は、 g_i で使われる u と v_i が抽象的変分問題 (問題 5.1) を満たすための Lagrange 乗数である。 φ_1 は \mathcal{L}_{Ii} においては定ベクトルとみなす。

$$\begin{split} \mathcal{L}_{\mathrm{I}i}'\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\varphi_{2},\hat{u},\hat{v}_{i},\hat{w}_{i},\hat{z}_{i}\right] \\ &= \mathcal{L}_{\mathrm{I}i\phi}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\varphi_{2}\right] + \mathcal{L}_{\mathrm{I}iu}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\hat{u}\right] \\ &+ \mathcal{L}_{\mathrm{I}iv_{i}}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\hat{v}_{i}\right] + \mathcal{L}_{\mathrm{I}iw_{i}}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\hat{w}_{i}\right] \\ &+ \mathcal{L}_{\mathrm{I}iz_{i}}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\hat{z}_{i}\right] \quad \forall \left(\varphi_{2},\hat{u},\hat{v}_{i},\hat{w}_{i},\hat{z}_{i}\right) \in X \times U^{4}, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{I}iu}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\hat{u}\right] = 0 \quad \forall \hat{u} \in U \iff w_{i} \text{ を求める随伴問題}, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{I}iv_{i}}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\hat{v}_{i}\right] = 0 \quad \forall \hat{v}_{i} \in U \iff z_{i} \text{ を求める随伴問題}, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{I}i\phi}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},z_{i}\right)\left[\hat{v}_{i}\right] = 0 \quad \forall \hat{v}_{i} \in U \iff z_{i} \text{ を求める随伴問題}, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{I}i\phi}\left(\phi,u,v_{i},w_{i},(\varphi_{1}),z_{i}\left(\varphi_{1}\right)\right)\left[\varphi_{2}\right] = h_{i}\left(\phi,u,v_{i}\right)\left[\varphi_{1},\varphi_{2}\right] \\ &= g_{\mathrm{H}i}\left(\phi,u,v_{i},\varphi_{1}\right)\left[\varphi_{2}\right] \end{split}$$

 $g_{\mathrm{H}i}\left(\phi,u,v_{i},\varphi_{1}\right)\left[\varphi_{2}\right]$ を Hesse 勾配とよぶことにする.

5.3 Q-3 勾配法と Newton 法はどのように定義されるのか?

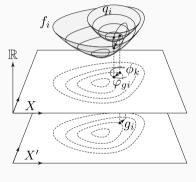


図 5.9: 勾配法

$$X=\mathbb{R}^n$$
 $(n\in\mathbb{N})$ のとき、

$$q_{i}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{g}_{i}\cdot\boldsymbol{\varphi} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in X$$

X が Hilbert 空間のとき,

$$q_i(\varphi) = \frac{1}{2} a_X(\varphi, \varphi) + \langle \boldsymbol{g}_i, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in X$$

Q-3-1 勾配法の定義

 $X = \mathbb{R}^n \ (n \in \mathbb{N})$ のとき、 $f_i : X \to \mathbb{R}$ の Taylor 展開

$$f_i(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = f_i(\boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{\varphi} + o(\|\boldsymbol{\varphi}\|_X)$$

勾配法: $g_i \in X' = X$ が与えられたとき、探索ベクトル $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ.

$$\boxed{ \boldsymbol{\varphi}_{gi} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}) = -\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{X} } \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\varphi}_{gi} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{g}_i$$

ただし、A は有界な**正定値**対称行列とする.すなわち、 $A=A^{ op}$ 、

$$\exists \alpha, \beta > 0: \ \varphi \cdot (\boldsymbol{A}\varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_{\mathbb{R}^d}^2, \ |\varphi \cdot (\boldsymbol{A}\psi)| \leq \beta \|\varphi\|_X \|\psi\|_X \ \forall \varphi, \psi \in X$$
 φ_{ai} は f_i を減少させる.

$$f_{i}\left(\boldsymbol{\phi}+\epsilon\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)-f_{i}\left(\boldsymbol{\phi}\right)=-\epsilon\boldsymbol{\varphi}_{gi}\cdot\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)+o\left(\epsilon\right)\leq-\epsilon\alpha\left\|\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right\|_{X}^{2}+o\left(\epsilon\right).$$

関数空間上の勾配法

X が関数空間 (Hilbert 空間)のとき、 $f_i: X \to \mathbb{R}$ の Taylor 展開

$$f_i(\phi + \varphi) = f_i(\phi) + \langle g_i, \varphi \rangle_{X' \times X} + o(\|\varphi\|_X)$$

X 上の勾配法: $g_i \in X'$ が与えられたとき、探索ベクトル $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ.

$$a_X \left(\varphi_{gi}, \varphi \right)_{X \times X} = - \left\langle g_i, \varphi \right\rangle_{X' \times X} \quad \forall \varphi \in X$$

 $a_X: X \times X \to \mathbb{R}$ は強圧的双線形汎関数 ($\in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$), すなわち

$$\exists \alpha, \beta > 0 : a_X(\varphi, \varphi) \ge \alpha \|\varphi\|_X^2, \ |a_X(\varphi, \psi)| \le \beta \|\varphi\|_X \|\psi\|_X \ \forall \varphi, \psi \in X$$

 φ_{gi} は f_i を減少させる.

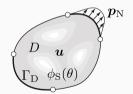
$$f_i\left(\phi + \epsilon \varphi_{gi}\right) - f_i\left(\phi\right) = -\epsilon a_X\left(\varphi_{gi}, \varphi_{gi}\right) + o\left(\epsilon\right) \le -\epsilon \alpha \left\|\varphi_{gi}\right\|_X^2 + o\left(\epsilon\right).$$

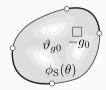
X が H^1 級の関数空間のとき, H^1 勾配法とよぶ.

(1) 密度変動型 H^1 勾配法

 $g_i \in X'_{\theta}$ が与えられたとき、 $\vartheta_{gi} \in X_{\theta}$ を求めよ。 c_a , c_D は正定数とする.

$$c_a \int_D \left(\nabla \mathbf{v}_{gi} \cdot \nabla \psi + c_D \mathbf{v}_{gi} \psi \right) dx = - \int_D \mathbf{g}_i \psi \, dx \quad \forall \psi \in X_\theta$$
 (5.5)





(a) 線形弾性問題: Find $u \in U_{\theta}$ (b) H^1 勾配法: Find $\vartheta_{g0} \in X_{\theta}$

図 5.10: 密度変動型 H¹ 勾配法 (平均コンプライアンス)

(2) 領域変動型 H^1 勾配法

$$c_{a} \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}_{gi}) \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\psi}) + c_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}_{gi} \cdot \boldsymbol{\psi}) \, \mathrm{d}x \qquad (c_{a}, c_{\Omega} \text{ は正定数})$$

$$= \begin{cases} -\int_{\Omega(\phi)} (\boldsymbol{G}_{\Omega i} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^{\top} + g_{\Omega i} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) \, \mathrm{d}x & (\mathbf{g} \mathbf{J} \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}) \\ -\int_{\Omega(\phi)} \bar{g}_{\partial \Omega i} \cdot \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\gamma & (\mathbf{J} \mathbf{J} \mathbf{J} \mathbf{J} \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}) \end{cases} \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in X_{\phi} \qquad (5.6)$$

$$u_{D} \quad \Omega(\phi) \quad \boldsymbol{\psi} \qquad \boldsymbol{\psi}$$

Q-3-2 Newton 法の定義

$$X = \mathbb{R}^d$$
 のとき、 $g_i(\phi) \cdot \varphi_1$ の Taylor 展開

$$\boldsymbol{g}_{i}\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}_{2}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}_{1}=\boldsymbol{g}_{i}\left(\boldsymbol{\phi}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}_{1}+\boldsymbol{\varphi}_{2}\cdot\left(\boldsymbol{H}_{i}\left(\boldsymbol{\phi}\right)\boldsymbol{\varphi}_{1}\right)+o\left(\left\|\boldsymbol{\varphi}_{2}\right\|_{X}\right)$$

Newton 法

$$g_{i}(\phi + \varphi_{g}) \cdot \varphi \approx g_{i}(\phi) \cdot \varphi + \varphi_{g} \cdot (H_{i}(\phi)\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in X$$

$$\Longrightarrow \left| \boldsymbol{\varphi}_{gi} \cdot \left(\boldsymbol{H}_i \left(\boldsymbol{\phi} \right) \boldsymbol{\varphi} \right) = -\boldsymbol{g}_i \left(\boldsymbol{\phi} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in X \right|$$

関数空間上の H^1 Newton 法

X が関数空間 (Hilbert 空間)のとき、 $\langle g_i(\phi), \varphi_1 \rangle$ の Taylor 展開

$$\langle g_i (\phi + \varphi_2), \varphi_i \rangle = \langle g_i (\phi), \varphi_1 \rangle + h_i (\phi) [\varphi_1, \varphi_2] + o (\|\varphi_2\|_X)$$

H^1 Newton 法

$$h_{i}\left(\phi\right)\left[\varphi_{gi},\varphi\right] + a_{X}\left(\varphi_{gi},\varphi\right) = -\left\langle g_{i}\left(\phi\right),\varphi\right\rangle \quad \forall \varphi \in X$$

ただし、 $a_X: X \times X \to \mathbb{R}$ は $h_i(\phi)[\cdot, \cdot]$ が強圧的双線形汎関数にならないときに、正則化するために加える強圧的双線形汎関数とする.

(5.1) と (5.3) の h_0 は、u が $C^{0,1}$ 級のとき、強圧的双線形汎関数となる [1, Fig. 8.9]. しかし、(5.2) の h_1 は、強圧的ではない [1, Fig. 8.13].

アルゴリズム例

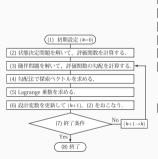


図 5.12: 勾配法

[1, Algorithm 3.7.2]

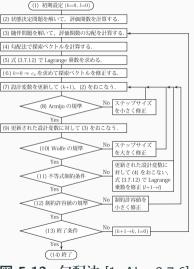


図 5.13: 勾配法 [1, Alg. 3.7.6]

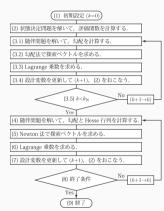


図 **5.14**: Newton 法

[1, Algorithm 3.8.4]

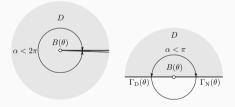
5.4 Q-4 探索ベクトルが許容集合 $\mathcal D$ に入る条件は何か?

探索ベクトルは $X \in \{X_{\theta}, X_{\phi}\}$ に入るが、 $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}_{\theta}, \mathcal{D}_{\phi}\}$ には入らない。

⇒ u の許容集合に正則性の条件を加える必要がある.

密度変動型

$$\mathcal{S}_{ heta} = U_{ heta} \cap W^{1,2q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}^d\right) \ \left(q_{\mathrm{R}} > d\right)$$



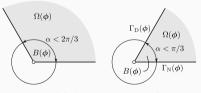
(a) 同一種境界

(b) 混合境界

図 5.15: 特異点近傍 $B(\theta)$

領域変動型

$$S_{\phi} = \begin{cases} U_{\phi} \cap W^{2,4} \left(D; \mathbb{R}^{d} \right) & \text{(領域積分)} \\ U_{\phi} \cap W^{2,2q_{\mathbb{R}}} \left(D; \mathbb{R}^{d} \right) & \text{(境界積分)} \end{cases}$$



(a) 同一種境界

(b) 混合境界

図 5.16: 特異点近傍 $B(\phi)$

H^1 勾配法の正則性

密度変動型

$$(\theta, \boldsymbol{u}(\theta)) \in \mathcal{D}_{\theta} \times \mathcal{S}_{\theta}$$
 のとき, H^1 勾配法の弱解 $\vartheta_{gi} \in X_{\theta}$ は $\underline{D \setminus \bar{B}(\theta)}$ 上で $\underline{H^2 \cap C^{0,1}}$ 級 $(B(\phi) = \emptyset \text{ のとき } \underline{\vartheta_{gi} \in Y_{\theta}})$ となる.

領域変動型

$$(\phi, u(\phi)) \in \mathcal{D}_{\phi} \times \mathcal{S}_{\phi}$$
 のとき, H^1 勾配法の弱解 $\varphi_{gi} \in X_{\phi}$ は $\underline{\Omega(\phi) \setminus \overline{B}(\phi)}$ 上で $\underline{H^2 \cap C^{0,1}}$ 級 $(B(\phi) = \emptyset \text{ のとき } \underline{\varphi_{gi} \in Y_{\phi}})$ となる.

6. 数値例と理論的考察

(1) 密度変動型

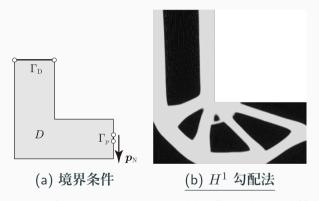


図 6.1: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例

(2) 領域変動型 (初期形状における特異点)

初期形状における特異点の影響が残ってしまう例

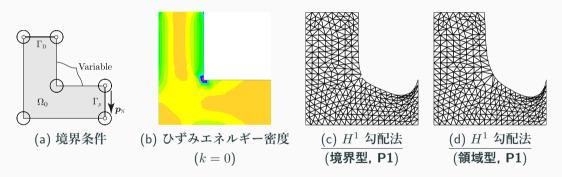


図 6.2: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例

領域積分型の形状微分は特異点の影響を受けにくい.

(3) 領域変動型 (最適形状における特異点)

最適形状におけい特異点が発生する例

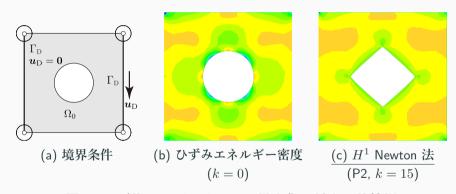


図 6.3: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例

探索経路に沿った f_0 の 2 階微分が不安定になる.

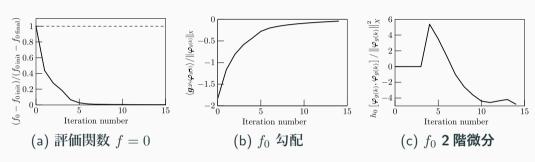


図 6.4: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例: H^1 Newton 法

7. 実問題への応用例

§7.1 スポーツシューズの最適設計 (Nonogawa et al. [3])



図 7.1: スポーツシューズ

- 1. クッション性 (衝撃緩衝性)
- **2. 安定性** (過度な変形の抑制: プロネーション)
- 3. グリップ
- 4. 耐久性
- 5. 柔軟性
- 6. フィット性
- 7. 通気性
- 8. 軽量

設計目標とソールのモデリング

クッション性能を変えずに安定性を高める.

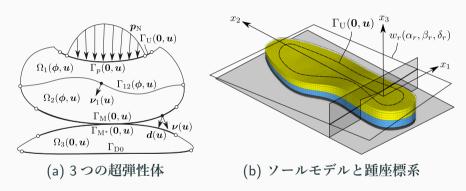


図 7.2: ソールのモデリング

- 安定性とクッション性を評価するタイミング

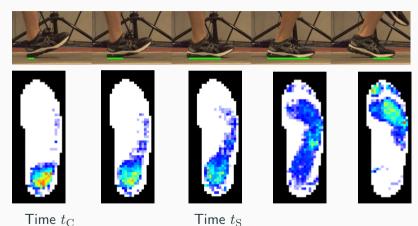


図 7.3: ランニング運動中の圧力分布

状態決定問題

第 1 Piola-Kirchhoff 応力: $\Pi(u)$, Cauchy 応力: $\Sigma(u)$

問題 7.1 (超弾性変形)

$$oldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}_{\phi}$$
 と $oldsymbol{p}_{
m N}$ に対して、次を満たす $(oldsymbol{u},p) \in \mathcal{S}_{\phi} imes \mathcal{Q}_{\phi}$ を求めよ.
$$-oldsymbol{
abla}^{ op} oldsymbol{\Pi}^{ op}(oldsymbol{u}) = oldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3} \quad ext{in } \Omega\left(oldsymbol{\phi}\right), \ oldsymbol{\Sigma}\left(oldsymbol{u}
ight) oldsymbol{
u}\left(oldsymbol{u}\right) = oldsymbol{p}_{
m N}\left(oldsymbol{u}\right) \quad ext{on } \Gamma_{p}\left(oldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3}, oldsymbol{u}\right), \ oldsymbol{u}\left(oldsymbol{u}\right) oldsymbol{
u}\left(oldsymbol{u}\right) = oldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3} \quad ext{on } \Gamma_{{
m D}0}, \ oldsymbol{\Sigma}\left(oldsymbol{u}\right) oldsymbol{
u}\left(oldsymbol{u}\right) = -oldsymbol{p}oldsymbol{
u}\left(oldsymbol{u}\right) \quad ext{on } \Gamma_{{
m M}}\left(oldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3}, oldsymbol{u}\right), \ oldsymbol{g}\left(oldsymbol{u}\right) \leq 0, \quad pg\left(oldsymbol{u}\right) = 0 \quad ext{on } \Gamma_{{
m M}}\left(oldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3}, oldsymbol{u}\right). \$$

近似平面

 $r \in \{S,C\}$ に対して,近似平面を次式のように定義する.

$$w_r(\alpha_r, \beta_r, \delta_r) = \frac{\alpha_r x_1 + \beta_r x_2 + \delta_r}{\delta_r}$$

問題 7.2 (近似平面)

 u_{r3} $(r \in \{S,C\})$ が与えられたとき、次を満たす $(\alpha_r,\beta_r,\delta_r)$ を求めよ.

$$\min_{(\alpha_r, \beta_r, \delta_r) \in \mathbb{R}^3} \left\{ f_{\mathrm{U}}(\alpha_r, \beta_r, \delta_r) = \int_{\Gamma_{\mathrm{U}0}} (u_{r3} - w_r (\alpha_r, \beta_r, \delta_r))^2 \,\mathrm{d}\gamma \right\}$$

問題 7.2 の解 $(\alpha_r, \beta_r, \delta_r)$ は積分式で得られる.

形状最適化問題

安定性とクッション性を表す評価関数:

$$f_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{S}}) = \alpha_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{S}}),$$

$$f_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{C}}) = \delta_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{C}}) - \delta_{\mathrm{I}}$$

問題 7.3 (形状最適化)

次を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ.

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}_{\phi}} \left\{ f_{S}(\boldsymbol{u}_{S}) \mid f_{C}(\boldsymbol{u}_{C}) = 0, \right.$$

$$\left(\boldsymbol{u}_{r}, p_{r} \right) \in \mathcal{S}_{\phi} \times \mathcal{Q}_{\phi} \left(r \in \{S, C\} \right) : 問題 7.1 \, \mathfrak{O}解,$$

$$\left(\alpha_{r}(\boldsymbol{u}_{r}), \beta_{r}(\boldsymbol{u}_{r}), \delta_{r}(\boldsymbol{u}_{r}) \right) : 問題 7.2 \, \mathfrak{O}解 \right\}$$

最適化されたソール形状

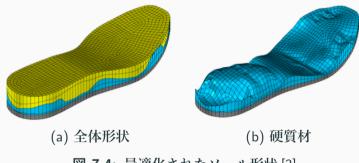
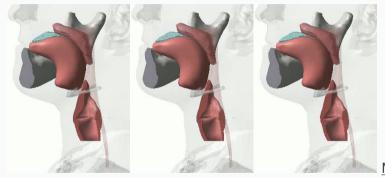


図 7.4: 最適化されたソール形状 [3]

GEL-KAYANO LITE 2 (ASICS)

§7.2 嚥下における筋活動の同定 (A. et al. [2])



Movie

図 7.5: 嚥下運動のシミュレーション [菊地貴博 (武蔵野赤十字病院) 提供]

次の目標

従来の研究では、**器官の運動**は観測結果に合わせて**人工的**に与えられていた.

▼

器官の形状変化を引き起こす 筋活動を数理モデルに基づいて**理論的**に同定したい.

筋活動のモデリング

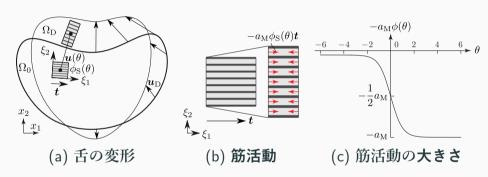


図 7.6: 筋活動 (収縮応力) のモデリング

反力が最小になるような $\theta \in \mathcal{D}_{\theta}$ を求める.

変位 u の関数空間::

$$U_{\theta} = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^{1}\left(\Omega_{0}; \mathbb{R}^{d}\right) \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{d}} \text{ on } \Gamma_{D0} \right\},$$

$$S_{\theta} = U_{\theta} \cap C^{0,1}\left(\bar{\Omega}_{0}; \mathbb{R}^{d}\right)$$

右 Cauchy-Green 変形テンソル::

$$oldsymbol{C}\left(oldsymbol{u}
ight) = oldsymbol{F}^{ op}\left(oldsymbol{u}
ight) oldsymbol{F}\left(oldsymbol{u}
ight) \quad ext{where } oldsymbol{F}\left(oldsymbol{u}
ight) = oldsymbol{I} + \left(oldsymbol{
abla}oldsymbol{u}^{ op}
ight)^{ op}$$

第 2 Piola-Kirchhoff 応力: 弾性ポテンシャル p(C(u)) に対して

$$S\left(\theta, \boldsymbol{u}\right) = 2\frac{\partial p\left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)}{\partial \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{u}\right)} - a_{\mathrm{M}}\phi_{\mathrm{S}}\left(\theta\right)\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\left(\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{M}}\left(\theta\right)$$

本研究では、圧縮性 neo-Hooke 則が使われた.

状態決定問題

第 1 Piola-Kirchhoff 応力: $\Pi(\theta, u) = F(u) S(\theta, u)$

問題 7.4 ($u_{ m D}$ と heta による超弾性有限変形問題)

$$oldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\in C^{0,1}\left(ar{\Omega}_{0};\mathbb{R}^{d}
ight)$$
 と $heta\in\mathcal{D}$ が与えられたとき、

$$-\mathbf{
abla}^{ op}\Pi^{ op}\left(heta,oldsymbol{u}
ight)=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^{ op}\quad ext{in }\Omega_0, \ oldsymbol{u}=oldsymbol{u}_{ ext{D}}\quad ext{on }\partial\Omega_0$$

を満たす $u \in S_{\theta}$ を求めよ.

筋活動同定問題

 $u_{\rm D}$ に対する反力の L^2 ノルムの 2 乗

$$f_0(\boldsymbol{u}, \alpha) = \int_{\partial \Omega_0} \left\{ \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) - \alpha \right\}^2 d\gamma$$

 $\alpha \in \mathbb{R}$ は体積変化による静水圧を除くための変数とする.

問題 7.5 (筋活動同定問題)

次を満たす θ を求めよ.

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}_{\theta}} \{ f_0(\boldsymbol{u}, \alpha) \mid \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_D \in \mathcal{S}_{\theta} : 問題 7.4 の解, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

数值例

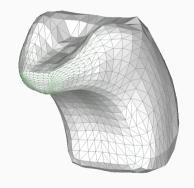


図 7.7: 舌の有限要素モデル

- 有限要素: 4面体 2次
- 節点数/要素数: 10564 / 59701
- ヤング率:20 kPa
- ポアソン比: 0.45
- 最大筋収縮応力 *a*_M: 6.5 kPa
- θ の初期値: -3

同定された筋活動

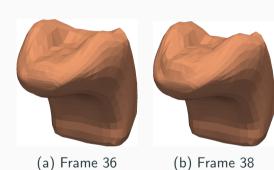


図 7.8: 舌の変形

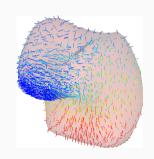


図 7.9: 筋活動 $a_{\mathrm{M}}\phi\left(\theta\right)t=-S_{\mathrm{M}}\left(\theta_{\mathrm{opt}}\right)t$ $\left(\nu_{\mathrm{P}}=0,\,\mathrm{Frame}\,\,36\text{-}38\right)$

8. おわりに

おわりに

本講義では、偏微分方程式の境界値問題が等式制約として課されたときの最 適化問題の構成法と解法、さらには応用について考えてきた.

- 1. 領域の変動を表す関数を設計変数に選べば、領域変動型の形状最適化問題となる。偏微分方程式の係数関数として密度を表す関数を設計変数に選べば、密度変動型の位相最適化問題となる。
- 2. それらの問題の構成法や解法は関数空間上で考えることができる.
 - 勾配法は Hilbert 空間 X 上で定義される。設計変数が入る X に対して、 勾配はその双対空間 X' の要素として定義される。勾配法は写像 $X' \to X$ を求める問題となる。
 - その際, 関数の正則性に関する条件が課される.

- 3. 偏微分方程式の制約つき最適化問題の実問題への応用例を示した.
 - スポーツシューズの**ソール形状を最適化する問題**を領域変動型問題を応用して構成した.
 - 嚥下における**舌内部の筋活動を求める問題**を密度変動型問題を応用して構成した.この問題における設計変数は、<u>もはや領域の形状や位相ではない</u>、現象を制御する変数となっている.

9. 参考文献

[1] AZEGAMI, H.

Shape optimization problems.

Springer, Singapore, 2020.

[2] AZEGAMI, H., ONO, S., TAKEUCHI, K., KIKUCHI, T., MICHIWAKI, Y., HANYU, K., AND KAMIYA, T. Identification of muscle activity in tongue motion during swallowing through medical image data.

Journal of Biomechanical Science and Engineering (2021).

[3] NONOGAWA, M., TAKEUCHI, K., AND AZEGAMI, H. Shape optimization of running shoes with desired deformation properties.

Structural and Multidisciplinary Optimization 62, 3 (2020), 1535-1546.