偏微分方程式制約つき最適化問題とその応用: 演習

(付録) FreeFEM プログラムのインストールと操作方法

畔上 秀幸, 名古屋産業科学研究所

連続最適化および関連分野に関する夏季学校 2022,
統計数理研究所, 2022 年 8 月 8 – 10 日

課題 1

SIMP 型線形弾性体に対する平均コンプライアンス最小化問題 (問題 5.4) を参考にして，SIMP 型熱伝導場 (Poisson 問題) に対する平均温度[1] 最小化問題を次のように定義する．

問題 1.1 (SIMP 型 Poisson 問題)

$b : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$), $u_{\mathrm{D}} : \Gamma_{\mathrm{D}} \to \mathbb{R}$ ($\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial D$), $p_{\mathrm{N}} : \Gamma_{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$ ($\Gamma_{\mathrm{N}} = \partial D \setminus \bar{\Gamma}_{\mathrm{D}}$) が与えられたとき，次を満たす関数 $u : D \to \mathbb{R}$ を求めよ．

$$-\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\phi_{\mathrm{S}}^{\alpha}(\theta)\, \boldsymbol{\nabla} u\right) = b \quad \text{in } D, \quad \phi_{\mathrm{S}}^{\alpha}(\theta)\, \partial_{\nu} u = p_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \quad u = u_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}$$

[1]熱コンプライアンスとよばれることもある．

平均温度と体積制約関数

$$f_0(\theta, u) = \int_D bu \; \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} u \; \mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \phi^{\alpha}(\theta)\, u_{\mathrm{D}} \partial_{\nu} u \; \mathrm{d}\gamma,$$

$$f_1(\theta) = \int_D (\phi_{\mathrm{S}}(\theta) - c_1)\, \mathrm{d}x$$

問題 1.2 (SIMP 型平均温度最小化問題)

次を満たす θ を求めよ．ただし，$\tilde{u}_{\mathrm{D}} : D \to \mathbb{R}$ $(\tilde{u}_{\mathrm{D}}|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = u_{\mathrm{D}})$ とする．

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}_\theta} \{ f_0(\theta, u) \mid f_1(\theta) \leq 0,\ u - \tilde{u}_{\mathrm{D}} \in \mathcal{S}_\theta \text{ は問題 1.1 の解} \}$$

(設問)

1. 問題 1.1 の弱形式と Lagrange 関数 $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, u, v)$ を求めよ．
2. f_0 に対する Lagrange 関数 $\mathscr{L}_0(\theta, u, v_0)$ を求めよ．
3. $\mathscr{L}_0$ の Fréchet 微分 $\mathscr{L}_0'(\theta, u, v_0)[\vartheta, \hat{u}, v_0]$ から自己随伴関係が成り立つことを示せ．
4. $\mathscr{L}_{0\theta}(\theta, u, v_0)[\vartheta] = \langle g_0, \vartheta \rangle$ から <u>f_0 の勾配 g_0 を求めよ</u>．ただし，b は θ の関数ではないと仮定する．

(解答例)

1. (問題 1.1 の弱形式) 講義資料 P. 37 問題 3.2 と同様に，次のようにおく．

$$U = \left\{ v \in H^1(D;\mathbb{R}) \middle| \ v = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} \right\},$$
$$U(u_{\mathrm{D}}) = \left\{ \tilde{u}_{\mathrm{D}} + v \mid v \in U,\ \tilde{u}_{\mathrm{D}} \in H^1(D;\mathbb{R}),\ \tilde{u}_{\mathrm{D}} = u_{\mathrm{D}} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} \right\}$$

SIMP 型 Poisson 方程式の両辺に任意の $v \in U$ をかけて D で積分すれば，

$$\begin{aligned} -\int_D \phi^\alpha(\theta)\, \Delta u v \,\mathrm{d}x &= \int_D \phi^\alpha(\theta)\, \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \phi^\alpha(\theta)\, \partial_\nu u v \,\mathrm{d}\gamma \\ &= \int_D b v \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.1}$$

Gauss-Green の定理と Dirichlet 条件が使われた．Neumann 条件も同様に，

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \phi^\alpha(\theta)\, \partial_\nu u v \,\mathrm{d}\gamma = \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} v \,\mathrm{d}\gamma \tag{1.2}$$

(1.2) を (1.1) に代入すれば，SIMP 型 Poisson 問題の弱形式を得る．

$$\text{Find } u \in U(u_{\mathrm{D}}) : \int_D \phi^\alpha(\theta) \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; \mathrm{d}x = \int_D b v \; \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} v \; \mathrm{d}\gamma \quad \forall v \in U$$

(解説) Dirichlet 条件は u を $U(u_{\mathrm{D}})$ の中から見つけるという前提条件によって満たされる．このことから，Dirichlet 条件は基本境界条件ともよばれる．また，次のような抽象的変分問題の形式でもかける．

$$\begin{aligned}
&\text{Find } u \in U(u_{\mathrm{D}}) : \; a(\theta)(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U, \\
&\text{where} \quad a(u, v) = \int_D \phi^\alpha(\theta) \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; \mathrm{d}x, \\
&\qquad\qquad\quad l(v) = \int_D b v \; \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} v \; \mathrm{d}\gamma.
\end{aligned}$$

問題 1.1 の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, u, v)$ は，講義資料 P. 87 の第 1 式を参考にして，$u \in U(u_{\mathrm{D}})$, $v \in U$ に対して次式で定義される．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, u, v) &= l(v) - a(\theta)(u, v) \\ &= \int_D \left(-\phi^{\alpha}(\theta) \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v + b \cdot v\right) \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} \cdot v \, \mathrm{d}\gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \left\{(u - u_{\mathrm{D}})\left(\phi^{\alpha}(\theta) \partial_{\nu} v\right) + v\left(\phi^{\alpha}(\theta) \partial_{\nu} u\right)\right\} \mathrm{d}\gamma\end{aligned}$$

ただし，$\underline{\Gamma_{\mathrm{D}}\text{ 上の積分はゼロであるが，のちのために残しておく}}$．

(解説) 上記 $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, u, v)$ の定義において，$u \in H^1(D; \mathbb{R})$ とすることも一案である．しかし，$v \in U \subset H^1(D; \mathbb{R})$ の場合，Γ_{D} 上で $\partial_{\nu} v$ を定義できない [2]．そこで,「Γ_{D} 上の積分はゼロである」と言い切るしかないように思われる．

[2] $\boldsymbol{\nabla} v \in L^2\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ は連続関数ではない．

2. (f_0 に対する Lagrange 関数) 講義資料 P. 87 の第 2 式を参考にして,

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_0(\theta, u, v_0) \\
&\quad = f_0(\theta, u) + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, u, v_0) \\
&\quad = \int_D \{-\phi^\alpha(\theta)\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_0 + b(u + v_0)\}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\mathrm{N}} p_\mathrm{N}(u + v_0)\ \mathrm{d}\gamma \\
&\qquad + \int_{\Gamma_\mathrm{D}} \{(u - u_\mathrm{D})(\phi^\alpha(\theta)\partial_\nu v_0) + (v_0 - u_\mathrm{D})(\phi^\alpha(\theta)\partial_\nu u)\}\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

で定義される．ここで，$u \in U(u_\mathrm{D})$, $v_0 \in U(u_\mathrm{D})$ と仮定して，Γ_D 上の積分はゼロとみなす．

3. ($\mathscr{L}_0$ の Fréchet 微分と自己随伴) 講義資料 P. 88 の第 1∼3 式を参考にして,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0'(\theta, u, v_0)[\vartheta, \hat{u}, v_0] &= \mathscr{L}_{0\theta}(\theta, u, v_0)[\vartheta] + \mathscr{L}_{0u}(\theta, u, v_0)[\hat{u}] \\ &\quad + \mathscr{L}_{0v_0}(\theta, u, v_0)[v_0] \quad \forall(\vartheta, \hat{u}, v_0) \in X \times U \times U, \\ \mathscr{L}_{0v_0}(\theta, u, v_0)[v_0] &= \mathscr{L}_{\mathrm{S}v_0}(\theta, u, v_0)[v_0] = \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, u, v_0) \quad \forall v_0 \in U, \\ \mathscr{L}_{0u}(\theta, u, v_0)[\hat{u}] &= \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, v_0, \hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in U \Longrightarrow v_0 = u \text{ (自己随伴)}\end{aligned}$$

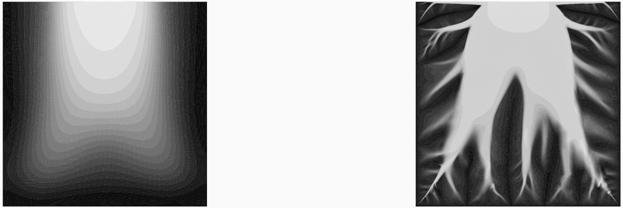
4. (f_0 の勾配) 講義資料 P. 88 の第 4 式を参考にして,

$$\mathscr{L}_{0\theta}(\theta, u, v_0)[\vartheta] = \int_D \boxed{-\alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_0} \vartheta \, \mathrm{d}x = \langle g_0, \vartheta \rangle$$

課題 2

問題 1.2 を解くための FreeFEM の言語でかかれたプログラム (`program/Poisson_topo/0_main.edp`) を提供する．提供されたプログラムを実行すれば，図 2.1 (a) の結果が得られる．

(**設問**) 図 2.1 (b) の結果を得るには，どの定数を変更すればよいか見つけよ．



(a) 原プログラムの結果　(b) 目標とする結果 [**解答**: cD=1.0e4]

図 2.1: SIMP 型熱伝導体の平均温度最小化問題

(付録) FreeFEM プログラムのインストールと操作方法

1. **FreeFem** を `https://freefem.org/` からインストールする．
    - **Download** ボタンをクリックし，使用する OS 用のプログラムをダウンロードする．
    - インストールプログラムを実行する．
2. **FreeFEM** プログラムを実行する．
    - **EDP ファイル (.edp)** をクリックする．

TEX がインストールされている場合

3. **1_make_graph.bat** (EDP ファイルがあるフォルダ内) は，**0_main.edp** (**0_main_errnorm.edp** がある場合はそれも含めて) 実行した後に出力されたデータファイルから **MetaPost** を使ってグラフファイルを作成するための Windows 用バッチファイルである．実際に使う実行ファイルは，

   C:/texlive/202x/bin/win32/mpost.exe

   である．もしも，バッチファイルが使えない場合は，コマンドプロンプトあるいはターミナル (Mac) で

   %mpost graph_config.mp

   を入力する．実行後，**EPS** 形式のグラフファイルが作成される．

4. **2_make_pdf.tex** は，**EPS** 形式のグラフファイルをまとめて，PDF ファイルに仕上げる TeX ファイルである．TeX コンパイラを実行すれば PDF ファイルが作成される．
5. 親フォルダ内の **1_make_graph.bat** と **2_make_pdf.tex** は，すべての子フォルダ内の **EDP** ファイルが実行された後，すべてのグラムを比較したグラフを作成するための Windows 用バッチファイルと TeX ファイルである．

3 次元問題の場合 (VTK ファイルを出力するプログラム)

6. **ParaView** を https://www.paraview.org/ からインストールする.
7. **ParaView** を実行し，**File** → **Open** → **plots** フォルダ内の **shape..vkt** あるいは **deform..vtk** を開く.
8. **Pipeline Browser** 内の **shape..vkt** or **deform..vtk** の左側にある目のアイコンをクリックする.
9. **Coloring** → **potential** を選択する.
10. マウスで物体を見やすい姿勢にして，**動画再生ボタン** (右向き三角のアイコン) をクリックする.