連続最適化および関連分野に関する夏季学校
リーマン多様体上の最適化理論とその周辺　演習問題

2021 年 8 月 24 日–8 月 25 日
京都大学　佐藤 寛之

記法については講義資料を参照してください．

問題 1. （この問題については講義スライドまたは講義中の説明で解答例を示しています）

(1) 密着空間において，任意の点列は任意の点に収束することを証明せよ．

(2) ハウスドルフ空間において，収束する点列の極限は一意であることを証明せよ．

(3) 2 個以上の要素をもつ密着空間はハウスドルフ空間でないことを証明せよ．

(4) 非加算無限個の要素をもつ離散空間は第 2 可算空間でないことを証明せよ．

(5) 滑らかな多様体 M, N, Q と滑らかな写像 $F\colon N \to Q,\ G\colon M \to N$ について，任意の点 $p \in M$ に対して $\mathrm{D}(F \circ G)(p) = \mathrm{D}F(G(p)) \circ \mathrm{D}G(p)$ が成り立つことを証明せよ．

(6) リーマン多様体上の滑らかな実数値関数の勾配は一意に定まることを証明せよ．

問題 2. $\mathbb{R}^n$ にリーマン計量

$$\bar{g}_x(\xi, \eta) = \xi^T G_x \eta, \quad \xi, \eta \in T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n$$

を定める．ここで，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して G_x は n 次正定値対称行列で，$x \mapsto G_x$ は滑らかである．球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T x = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ に誘導計量 g を定め，$(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ のリーマン部分多様体とする．

(1) S^{n-1} 上の点 x における接空間 $T_x S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid x^T \xi = 0\}$ への直交射影 $P_x\colon \mathbb{R}^n \to T_x S^{n-1}$ を求めよ．すなわち，任意の $d \in \mathbb{R}^n$ に対して，$P_x(d) \in T_x S^{n-1}$ かつ，$\bar{g}_x(d - P_x(d), \xi) = 0$ がすべての $\xi \in T_x S^{n-1}$ に対して成り立つような P_x を求めよ．

(2) $A \in \mathrm{Sym}(n)$ とし，実数値関数 $\bar{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\bar{f}(x) := x^T A x$ と定める．ユークリッド勾配 $\nabla \bar{f}(x) = (\partial \bar{f}(x)/\partial x_i) \in \mathbb{R}^n$ について，(1) の P_x による射影 $P_x(\nabla \bar{f}(x))$ を求めよ．

(3) (2) の $\bar{f}$ を S^{n-1} に制限した $f := \bar{f}|_{S^{n-1}}\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ の，S^{n-1} 上の点 x における勾配 $\operatorname{grad} f(x)$ を求めよ．これが (2) の結果と一般には一致しないのはなぜか？

問題 3. $1 \le p \le n$ とする．シュティーフェル多様体 $\mathrm{St}(p,n)$ 上の点 X における接空間 $T_X \mathrm{St}(p,n)$ は

$$T_X \mathrm{St}(p,n) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid X^T \xi + \xi^T X = 0\} \tag{\#}$$

と表される．

(1) $X_\perp^T X_\perp = I_{n-p}$ かつ $X^T X_\perp = 0$ となるような $X_\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$ が存在することを証明せよ．

(1) における $X_\perp$ は一意的ではないが，以下では $X_\perp$ を一つ固定する．

(2) 任意の $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ はある $B \in \mathbb{R}^{p \times p}, C \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ を用いて $A = XB + X_\perp C$ と書けることを証明せよ．

(3) 行列 $B \in \mathbb{R}^{p \times p}, C \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ を用いて表される行列 $\xi = XB + X_\perp C$ について，$\xi \in T_X \mathrm{St}(p,n)$ となるための必要十分条件を B, C を用いて表し，$\dim T_X \mathrm{St}(p,n) = p(p-1)/2 + p(n-p)$ を証明せよ．

(4) $\mathbb{R}^{n \times p}$ に標準内積によるリーマン計量

$$\bar{g}_X(\xi, \eta) = \operatorname{tr}(\xi^T \eta), \quad \xi, \eta \in T_X\mathbb{R}^{n \times p} \simeq \mathbb{R}^{n \times p},\ X \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

を定める．シュティーフェル多様体 $\mathrm{St}(p,n)$ に誘導計量 g を定め，$(\mathbb{R}^{n \times p}, \bar{g})$ のリーマン部分多様体とする．このとき，接空間 $T_X \mathrm{St}(p,n)$ への直交射影 P_X を，(#) または (3) の結果を用いて求めよ．すなわち，任意の $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ に対して $P_X(Y)$ を求めよ．

問題 4．$1 \le p \le n$ とする．シュティーフェル多様体 $\mathrm{St}(p,n)$ 上のレトラクションとして，

$$R_X^{\mathrm{QR}}(\eta) = \mathrm{qf}(X+\eta), \quad \eta \in T_X \mathrm{St}(p,n),\ X \in \mathrm{St}(p,n) \tag{*}$$

が知られている．ここで，$\mathrm{qf}(\cdot)$ は，フルランク行列 $Y \in \mathbb{R}_p^{n\times p}$ に対して，QR 分解の Q 成分を返す．すなわち，

$$Y = QR, \quad Q \in \mathrm{St}(p,n) \text{ かつ，} R \in \mathbb{R}^{p\times p} \text{ は対角成分がすべて正の上三角行列} \tag{**}$$

のとき，$\mathrm{qf}(Y) = Q$ である．式 (*) で定義される R^{QR} が実際に $\mathrm{St}(p,n)$ 上の well-defined なレトラクションであることを確認しよう．

(1) $Q_1, Q_2 \in \mathrm{St}(p,n)$ がある正則行列 $G \in \mathbb{R}^{p\times p}$ について $Q_2 = Q_1 G$ を満たすとき，$G \in \mathcal{O}(p)$ であることを証明せよ．

(2) フルランク行列 $Y \in \mathbb{R}_p^{n\times p}$ に対して，QR 分解 (**) の Q, R は一意に定まることを証明せよ．なお，そのような Q, R の組が少なくとも一つ存在することは，Gram–Schmidt の直交化法により保証される．

(3) $X \in \mathrm{St}(p,n), \eta \in T_X \mathrm{St}(p,n)$ のとき，$X+\eta \in \mathbb{R}^{n\times p}$ がフルランクであること，すなわち $\mathrm{rank}(X+\eta) = p$ であることを証明せよ．

(4) 写像 $\mathrm{qf}\colon \mathbb{R}_p^{n\times p} \to \mathrm{St}(p,n)$ について，$Y \in \mathbb{R}_p^{n\times p}, Z \in \mathbb{R}^{n\times p}$ に対して

$$\mathrm{D}\,\mathrm{qf}(Y)[Z] = Q\,\rho_{\mathrm{skew}}(Q^T Z R^{-1}) + (I_n - QQ^T) Z R^{-1}$$

が成り立つ（証明はたとえば [Sato 2021, Prop. 3.4] を参照）．ここで，$Q = \mathrm{qf}(Y) \in \mathrm{St}(p,n), R = Q^T Y$（つまり $Y = QR$ は Y の QR 分解 (**)）であり，正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して $\rho_{\mathrm{skew}}(A) = (r_{ij})$ は狭義下三角部分が A の狭義下三角部分と一致するような n 次反対称行列である．すなわち，

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & (i > j \text{ のとき}), \\ 0 & (i = j \text{ のとき}), \\ -a_{ji} & (i < j \text{ のとき}). \end{cases}$$

これを用いて，(*) で定義される R^{QR} が $\mathrm{St}(p,n)$ 上のレトラクションであることを証明せよ．

問題 5．M, N を微分同相な多様体とし，$\Phi\colon M \to N$ を微分同相写像とする．すなわち，Φ は全単射で，Φ も Φ^{-1} も滑らかであるとする．R^N が N 上のレトラクションであるとき，

$$R_x^M(\eta) := \Phi^{-1}(R^N_{\Phi(x)}(\mathrm{D}\,\Phi(x)[\eta])), \quad \eta \in T_x M,\ x \in M$$

により定義される R^M は M 上のレトラクションであることを証明せよ．

問題 6．リーマン多様体上の最適化問題に対するアルゴリズムを適用し，結果を観察せよ．用いるプログラミング言語・扱うリーマン多様体・その上の目的関数・適用するアルゴリズムは自由に選んで良い．講義中に紹介したライブラリなどの使い方を調べて利用することを想定している．