不動点理論と最適化演習の解説および総括

明治大学理工学部情報科学科
飯塚秀明

連続最適化および関連分野に関する夏季学校

2021年8月23日, 24日

- 演習（PDF参照下さい）
  - 8/23 16:35－17:05
  - 8/24 10:00－10:30
- 発表・解説および総括
  - 8/24 10:40－11:40

1. (ii)

2乗ノルム展開

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

1. (v)

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_i) : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^2 \qquad \langle y, e_n \rangle = y_n$$

$$\infty > \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 = 0$$

1. (v)

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_i) : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^2 \qquad \langle y, e_n \rangle = y_n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \langle y, e_n \rangle = 0 = \langle y, 0 \rangle$$

$$\therefore e_n \rightharpoonup 0$$

1. (v)

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_i) : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$$

$$e_n \rightharpoonup 0$$

$$\|e_n - 0\| = \|e_n\| = 1 \neq 0$$

$$\therefore e_n \not\to 0$$

1. (vi)

$$\boldsymbol{e}_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^N$$

$$\boldsymbol{x}_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{N,n})^\top \in \mathbb{R}^N$$

$$\rightharpoonup \boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)^\top \in \mathbb{R}^N$$

$$\forall i,$$

$$0 = \lim_{n \to \infty} \langle \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i \rangle = \lim_{n \to \infty} (a_{i,n} - a_i)$$

$$\forall i, \lim_{n \to \infty} a_{i,n} = a_i$$

1. (vi)

$$\boldsymbol{e}_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^N$$

$$\boldsymbol{x}_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{N,n})^\top \in \mathbb{R}^N$$

$$\rightharpoonup \boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)^\top \in \mathbb{R}^N$$

$$\forall i, \lim_{n \to \infty} a_{i,n} = a_i$$

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} (a_{i,n} - a_i)^2 \to 0$$

2. (iii)

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$$

$$H = H(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle \leq r\}$$

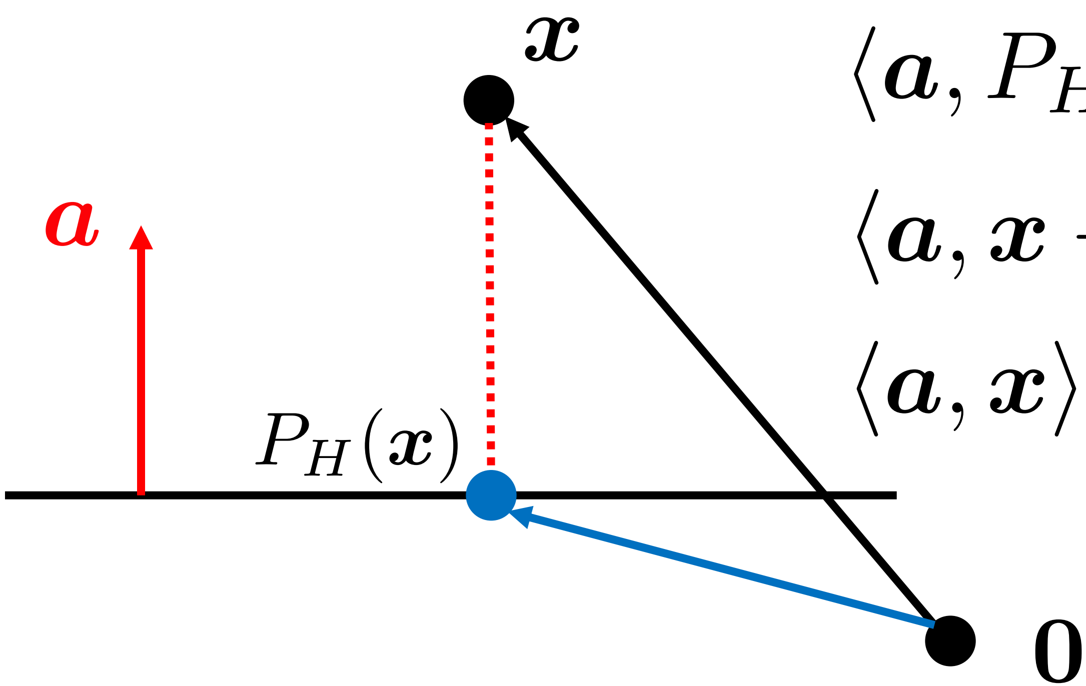
$$r \geq \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

2. (iii)

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$$

$$H = H(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle \leq r\}$$

$$P_H(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}$$



$$\langle \boldsymbol{a}, P_H(\boldsymbol{x}) \rangle = r$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a} \rangle = r$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle + t\|\boldsymbol{a}\|^2 = r$$

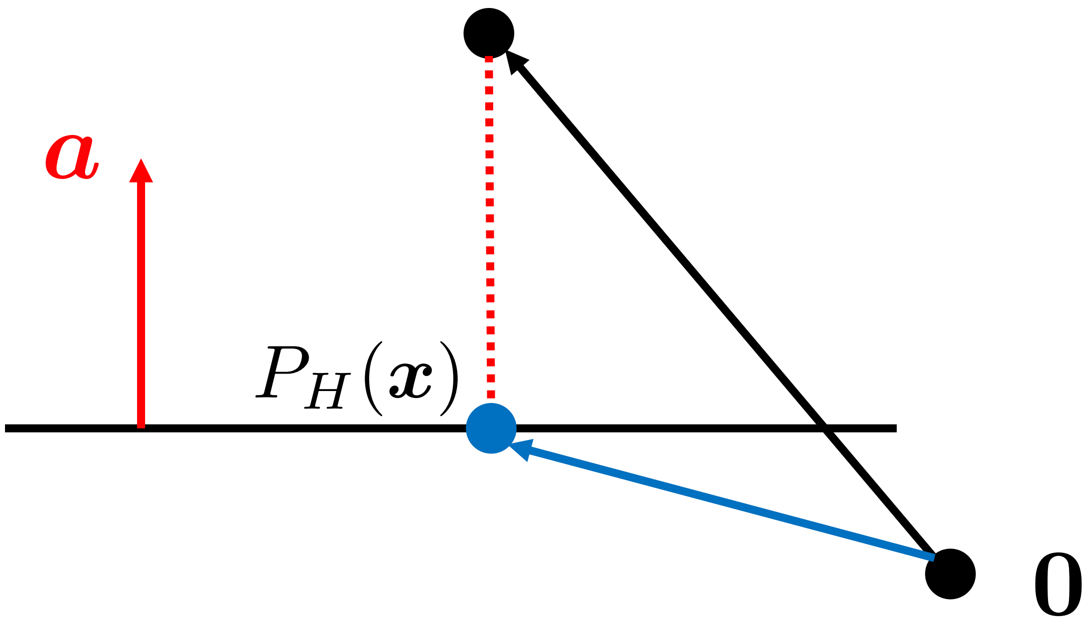
$$t = \frac{r - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$$

明治大学 MEIJI UNIVERSITY

$$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$$

$$H = H(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle \leq r\}$$

$$\boxed{P_H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} + \dfrac{r - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{x} \notin H), \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in H) \end{cases}}$$



$$t = \frac{r - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$$

2. (vi)

$$\bigcap_{i=1}^{m} C_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{Fix}(T) \subset \bigcap_{i=1}^{m} C_i$$

$$T = P_1 P_2 \cdots P_m$$

m = 1 は明らか。
m = 2 のときに成り立つことを示しましょう。

2. (vi)

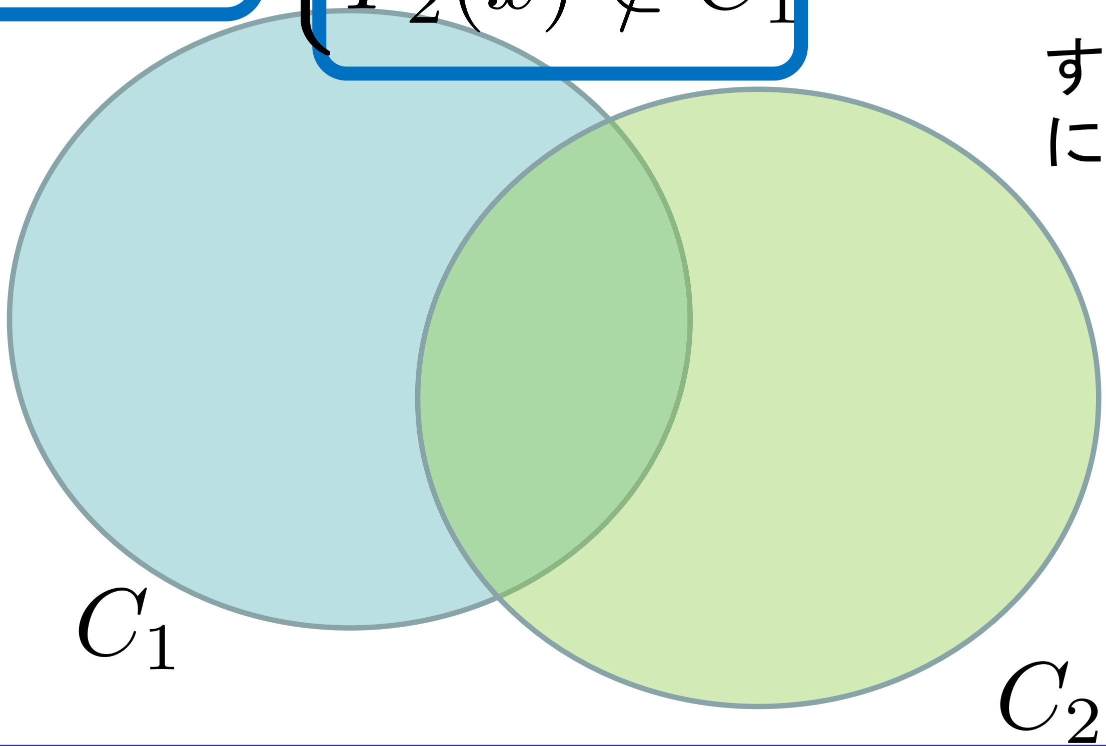
$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2)$$

① $\boxed{x \notin C_2}\ \begin{cases} P_2(x) \in C_1 \\ \boxed{P_2(x) \notin C_1} \end{cases}$

② $x \in C_2$

すべてのパターン①, ②
に対して証明すればよい

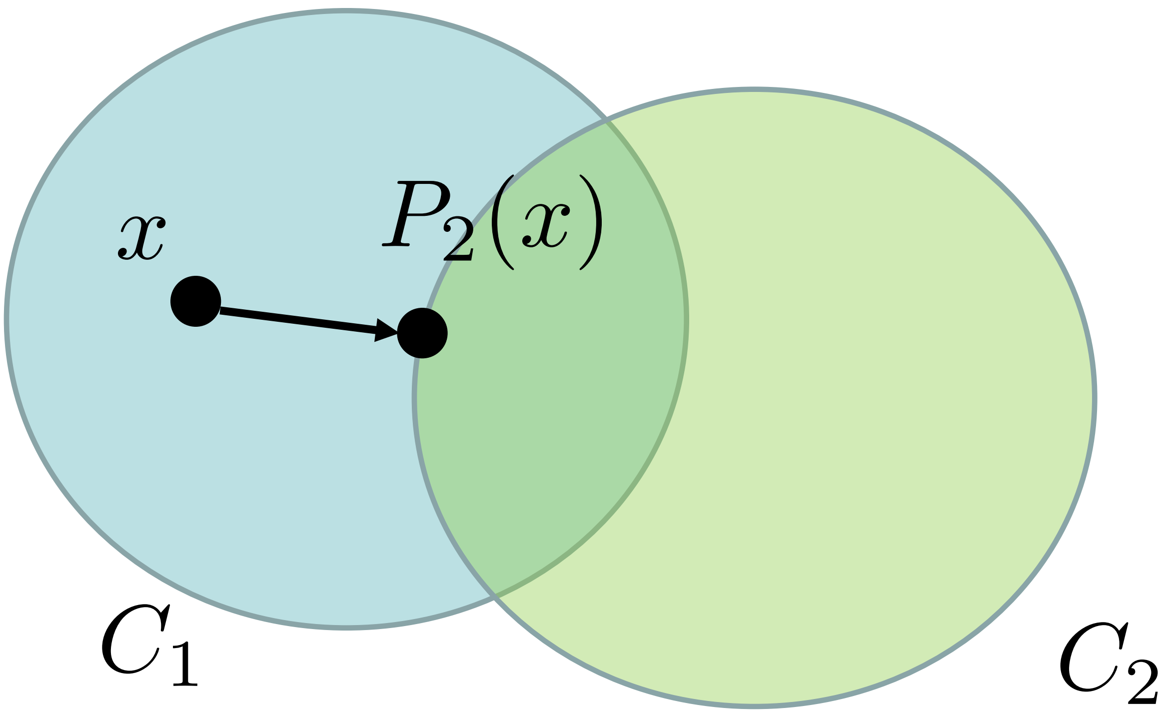


2. (vi)

$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2)$$

$$\boxed{x \notin C_2 \wedge P_2(x) \notin C_1}$$?



2. (vi)

$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2) \quad y \in C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$\boxed{x \notin C_2 \wedge P_2(x) \notin C_1}$ と仮定して矛盾を導く。

$$\|P_1(P_2(x)) - y\|^2 = \|P_1(P_2(x)) - P_1(y)\|^2$$

$$\leq \langle P_2(x) - y, P_1(P_2(x)) - y\rangle$$

P$_1$: 堅非拡大

$$\|P_1(X) - P_1(Y)\|^2 \leq \langle X - Y, P_1(X) - P_1(Y)\rangle$$

2. (vi)

$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2) \quad y \in C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$\boxed{x \notin C_2 \wedge P_2(x) \notin C_1}$ と仮定して矛盾を導く。

$$\|P_1(P_2(x)) - y\|^2 = \|P_1(P_2(x)) - P_1(y)\|^2$$

$$\leq \langle P_2(x) - y, P_1(P_2(x)) - y \rangle$$

$$\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$$

$$2\langle X, Y \rangle = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - \|X - Y\|^2$$

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(\|X\|^2 + \|Y\|^2 - \|X - Y\|^2)$$

2. (vi)

$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2) \quad y \in C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$\boxed{x \notin C_2 \wedge P_2(x) \notin C_1}$ と仮定して矛盾を導く。

$$\|P_1(P_2(x)) - y\|^2 = \|P_1(P_2(x)) - P_1(y)\|^2$$

$$\leq \langle P_2(x) - y, P_1(P_2(x)) - y\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\{\|P_2(x) - y\|^2 + \|P_1(P_2(x)) - y\|^2$$

$$- \|P_2(x) - P_1(P_2(x))\|^2\}$$

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}(\|X\|^2 + \|Y\|^2 - \|X - Y\|^2)$$

2. (vi)

$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2) \quad y \in C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$\boxed{x \notin C_2 \wedge P_2(x) \notin C_1}$ と仮定して矛盾を導く。

$$\|P_1(P_2(x)) - y\|^2 \leq \frac{1}{2}\{\|P_2(x) - y\|^2 + \|P_1(P_2(x)) - y\|^2$$

$$- \|P_2(x) - P_1(P_2(x))\|^2\}$$

$$\therefore \|P_1(P_2(x)) - y\|^2 \leq \|P_2(x) - y\|^2 - \boxed{\|P_2(x) - P_1(P_2(x))\|^2}$$

$$< \|P_2(x) - y\|^2 \qquad > 0$$

2. (vi)

$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2) \quad y \in C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$\boxed{x \notin C_2 \wedge P_2(x) \notin C_1}$ と仮定して矛盾を導く。

$$\|x-y\| = \|P_1(P_2(x)) - y\| < \|P_2(x) - y\|$$

$$\leq \|x-y\| \quad \text{矛盾}$$

$$\therefore x \in C_2 \vee P_2(x) \in C_1$$

2. (vi)

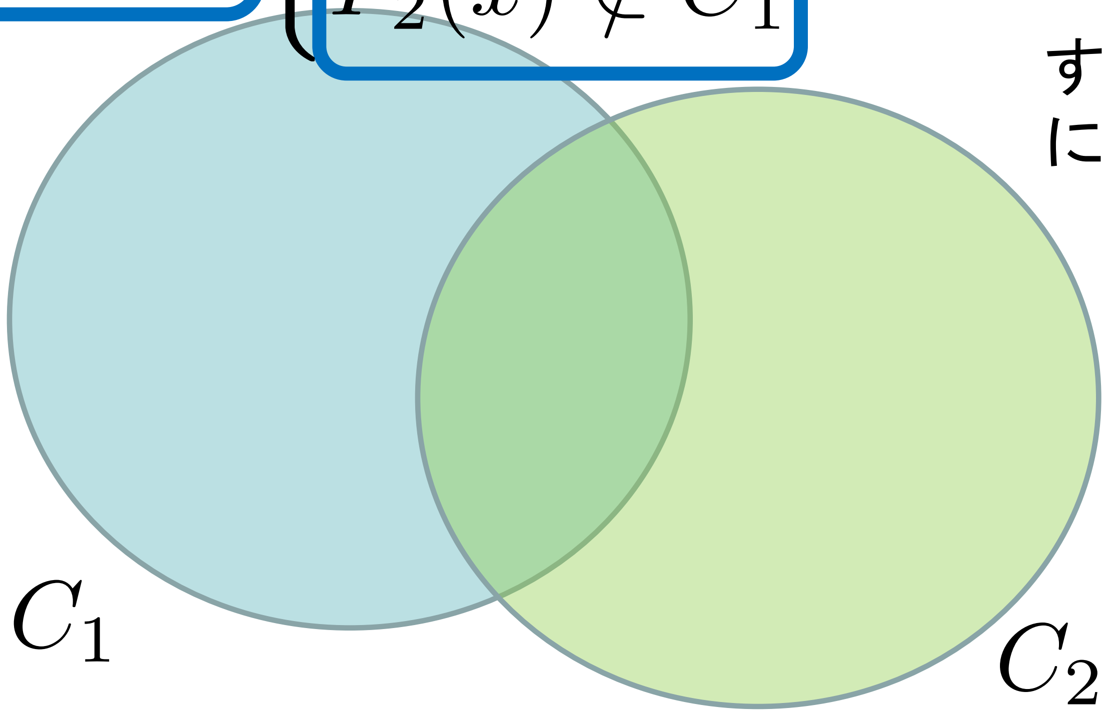
$$\mathrm{Fix}(P_1P_2) \subset C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1P_2)$$

① $\boxed{x \notin C_2} \begin{cases} P_2(x) \in C_1 \\ \boxed{P_2(x) \notin C_1} \end{cases}$

② $x \in C_2$

すべてのパターン①, ②
に対して証明すればよい



2. (vi) ①

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1 P_2)$$

$$P_2(x) \in C_1$$

$$P_2(x) = P_1 P_2(x) = x$$

$$P_2(x) = x \Longrightarrow x \in C_2$$

$$x = P_2(x) \in C_1 \Longrightarrow x \in C_1$$

$$\therefore x \in C_2 \cap C_1$$

2. (vi) ②

$$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1 P_2)$$

$$x \in C_2$$

$$P_1(x) = P_1 P_2(x) = x \implies x \in C_1$$

$$\therefore x \in C_2 \cap C_1$$

$$\therefore \mathrm{Fix}(P_1 P_2) \subset C_1 \cap C_2$$

3. (ii)

https://github.com/iiduka-researches/fixed-point

非拡大写像の形状

$$T_1 = P_1 P_2 \cdots P_m$$

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{m} B_i \neq \emptyset} \implies \mathrm{Fix}(T_1) = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$$

$$T_2 = P_1 \left(\sum_{i=2}^{m} w_i P_i \right) \qquad \Phi(y) := \sum_{i=2}^{m} w_i d(y, B_i)^2$$

$$\implies \mathrm{Fix}(T_2) = \left\{ x \in B_1 : \Phi(x) = \min_{y \in B_1} \Phi(y) \right\}$$

B_1 の部分集合で、B_i (i=2,3,…,m) に平均距離の意味で最も近い点の集まり

$$T_1 = P_1 P_2 \cdots P_m$$

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{m} B_i \neq \emptyset} \implies \mathrm{Fix}(T_1) = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$$

$$\bigcap_{i=1}^{m} B_i = \emptyset \implies \mathrm{Fix}(T_1) = ??$$

非拡大写像の形状

$$T_2 = P_1\left(\sum_{i=2}^{m} w_i P_i\right) \qquad \Phi(y) := \sum_{i=2}^{m} w_i d(y, B_i)^2$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Fix}(T_2) = \left\{ x \in B_1 : \Phi(x) = \min_{y \in B_1} \Phi(y) \right\}$$

B_1 の部分集合で、B_i (i=2,3,…,m) に平均距離の意味で最も近い点の集まり

$$\bigcap_{i=1}^{m} B_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{Fix}(T_2) = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$$

総括：本講義の目的

□不動点とは何か？

□不動点を見つけるとなぜ嬉しいのか？

という素朴な問に対する回答例の提示

■講義 1: ヒルベルト空間、便利な不等式

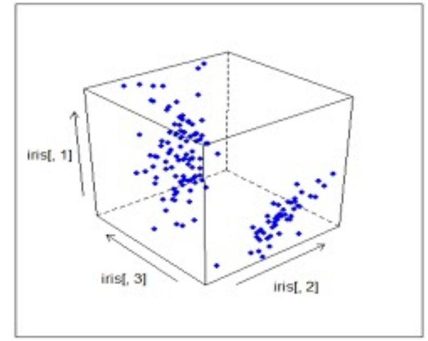
■講義 2: 不動点, 非拡大写像, 最適化

■講義 3: 不動点近似法

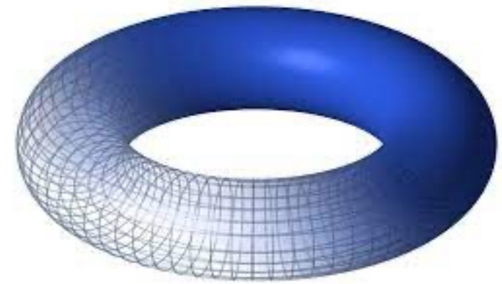
最近の研究動向（多様体へ）

明治大学
MEIJI UNIVERSITY

- 深層ニューラルネットワークは通常
  ユークリッド空間 (まっすぐな空間)



- 自然言語処理へ応用する時
  多様体 (曲がった空間)
  での最適化が必要

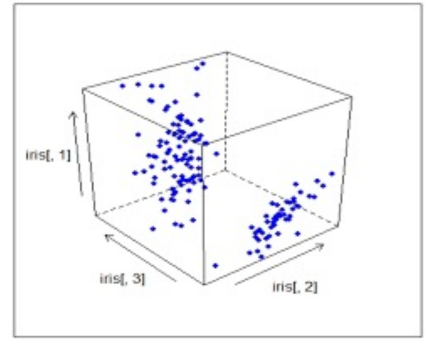


- 8/24 13:00ー リーマン多様体上の最適化理論とその周辺
  佐藤寛之先生

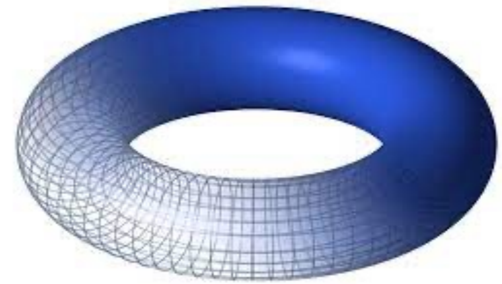
最近の研究動向（多様体へ）

明治大学 MEIJI UNIVERSITY

- 深層ニューラルネットワークは通常
  ユークリッド空間 (まっすぐな空間)



- 自然言語処理へ応用する時
  多様体 (曲がった空間)
  での最適化が必要



- リーマンAdam・リーマンAMSGrad
  の開発に成功（既存手法よりも高性能）

Hiroyuki SAKAI, H.I.: Riemannian Adaptive Optimization Algorithms and Its Applications to Natural Language Processing, IEEE Transactions on Cybernetics (2021)

最近の研究動向（多様体上の不動点問題）

明治大学 MEIJI UNIVERSITY

- 2015年 6/27: 成島先生、佐藤先生との研究打ち合わせ
- 多様体上での非拡大写像の不動点問題
  - 射影ー射影先
  - 射影積ー射影先の共通部分
  - リゾルベントーゼロ点集合
  - 自然な拡張ができる
- 不動点最適化アルゴリズムを多様体へ拡張

H.I., Hiroyuki SAKAI : Riemannian Stochastic Fixed Point Optimization Algorithm, submitted

参考文献

- 高橋渉著 非線形・凸解析学入門　横浜図書

文献

講義中に紹介した図書

- H.H.Bauschke, P.L.Combettes: Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces (Second Edition), Springer 2017
- 山田功著 工学のための関数解析 数理工学社
- 高橋渉著 凸解析と不動点近似 横浜図書

文献

- 不動点理論の応用(ネットワーク資源割当)
  - H.I.: Distributed Optimization for Network Resource Allocation With Nonsmooth Utility Functions, IEEE Transactions on Control of Network Systems 6 (4): 1354-1365 (2019)

❑不動点理論の応用（機械学習）

- H.I.: Stochastic Fixed Point Optimization Algorithm for Classifier Ensemble, IEEE Transactions on Cybernetics 50 (10): 4370–4380 (2020)
- H.Sakai, H.I.: Riemannian Adaptive Optimization Algorithm and Its Application to Natural Language Processing, IEEE Transactions on Cybernetics （2021)

研究室ウェブページ

明治大学
MEIJI UNIVERSITY

- https://iiduka.net/

数理最適化研究室
Mathematical Optimization Lab.

検索　ログイン

数理最適化研究室へようこそ

明治大学理工学部情報科学科 数理最適化研究室のウェブサイトです。
数理最適化研究室では、最適化理論とその数理情報工学への応用に関する研究を行っています。
最近は、**機械学習** に関する最適化アルゴリズムの研究に力を入れています。

This website is available in English.

科研費
KAKENHI

2021 年 8 月の生田キャンパスです。

以上でお終いです。
ありがとう
ございました。