連続最適化および関連分野に関する夏季学校
不動点理論と最適化 演習 解答例

2021 年 8 月 23 日– 8 月 24 日

明治大学 飯塚秀明

1. [講義 1]

(i) [講義中に演習予定] 内積空間 H のベクトル x に対して $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ とする。このとき, 任意の $x, y \in H$ に対して $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ が成り立つことを示しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(ii) 内積空間 H のベクトル x に対して $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ とする。このとき, 任意の $x, y \in H$ に対して $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成り立つことを示しましょう。

解答例: 2 乗ノルムの展開とコーシー・シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

よって, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(iii) [講義中に演習予定] ヒルベルト空間において, 強収束する点列は弱収束することを証明しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(iv) [講義中に演習予定] ヒルベルト空間の任意のベクトル x, y と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$ が成り立つことを証明しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(v) 弱収束する点列が強収束しないようなヒルベルト空間と点列の例を作りましょう。

解答例:

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \colon \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

のベクトル $e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$ と $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^2$ に対して $\langle y, e_n\rangle = y_n$ が成り立つので

$$\infty > \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n\rangle|^2.$$

よって, $\lim_{n\to\infty} \langle y, e_n\rangle = 0 = \langle y, 0\rangle$ を満たすので, (e_n) は 0 に弱収束する。一方で, $\|e_n - 0\| = \|e_n\| = 1 \neq 0$ から, (e_n) は 0 に強収束しない。

(vi) 有限次元ユークリッド空間上の点列において, 弱収束するならば強収束する。これを証明しましょう。

解答例: $\boldsymbol{e}_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^N$ とする。$(\boldsymbol{x}_n) \subset \mathbb{R}^N$ (ただし, $\boldsymbol{x}_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{N,n})^\top \in \mathbb{R}^N$) が $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ に弱収束するとすると, 任意の $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i\rangle = \lim_{n\to\infty} (a_{i,n} - a_i)$$

なので, 任意の $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_{i,n} = a_i$ が成り立つ。よって,

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (a_{i,n} - a_i)^2 = 0,$$

すなわち, $(\boldsymbol{x}_n)$ が $\boldsymbol{x}$ に強収束する。

2. [講義 2]

(i) **[講義中に演習予定]** C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする。このとき, 射影 P_C が堅非拡大写像, すなわち, 任意の $x, y \in H$ に対して $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle x - y, P_C(x) - P_C(y)\rangle$ となることを示しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(ii) **[講義中に演習予定]** 中心 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ と半径 $r > 0$ からなる閉球 $B(\boldsymbol{c}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\| \leq r\}$ への射影を陽に表現しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(iii) $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$（ただし, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$）と $r \in \mathbb{R}$ に対して, 半空間 $H(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle \leq r\}$ への射影を陽に表現しましょう。

解答例: $\boldsymbol{x} \notin H = H(\boldsymbol{a}, r)$ とする。ある $t \in \mathbb{R}$ が存在して $P_H(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}$ と書ける。$P_H(\boldsymbol{x})$ は $\langle \boldsymbol{a}, P_H(\boldsymbol{x})\rangle = r$ を満たすので

$$r = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle + t\|\boldsymbol{a}\|^2,$$

すなわち, $t = (r - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle)/\|\boldsymbol{a}\|^2$ となる。以上のことから,

$$P_H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} + \frac{r - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{x} \notin H), \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in H). \end{cases}$$

(iv) **[講義中に演習予定]** C_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を空でないヒルベルト空間の閉凸集合とし, $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$ とする。また, C_i への射影を P_i とする。このとき, 写像 $T = P_1 P_2 \cdots P_m$ が非拡大写像になることを証明しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(v) **[講義中に演習予定]** 問題 (iv) のもとで, $\mathrm{Fix}(T) \supset \bigcap_{i=1}^m C_i$ となることを証明しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(vi) 問題 (iv) のもとで, $\mathrm{Fix}(T) \subset \bigcap_{i=1}^m C_i$ となることを証明しましょう。

解答例: $m = 1$ のときは, $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1) = C_1$ より成り立つ。$\mathrm{Fix}(T) \subset \bigcap_{i=1}^2 C_i$ が成り立つことを証明すれば十分である。$x \in \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_1 P_2)$ とし, $y \in C_1 \cap C_2$ とする。$x \notin C_2 \wedge P_2(x) \notin C_1$ と仮定する。P_1 は堅非拡大写像なので

$$\|P_1(P_2(x)) - y\|^2 \leq \langle P_2(x) - y, P_1(P_2(x)) - y\rangle.$$

2 乗ノルム展開から,

$$\|P_1(P_2(x)) - y\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\{\|P_2(x) - y\|^2 + \|P_1(P_2(x)) - y\|^2 - \|P_2(x) - P_1(P_2(x))\|^2\right\}$$

を満たすので, $P_2(x) \notin C_1$ から

$$\|P_1(P_2(x)) - y\|^2 \leq \|P_2(x) - y\|^2 - \|P_2(x) - P_1(P_2(x))\|^2 < \|P_2(x) - y\|^2.$$

よって,

$$\|x - y\| = \|P_1(P_2(x)) - y\| < \|P_2(x) - y\| \leq \|x - y\|$$

となり矛盾が生じる。よって, $x \in C_2 \vee P_2(x) \in C_1$.

(a) $x \in C_2$ のとき, $P_1(x) = P_1 P_2(x) = x$ から $x \in C_1$ となるので, $x \in C_1 \cap C_2$.

(b) $P_2(x) \in C_1$ のとき, $P_2(x) = P_1 P_2(x) = x$ が成り立つ。$x = P_2(x)$ から $x \in C_2$, $x = P_2(x) \in C_1$ から $x \in C_1$ となるので, $x \in C_1 \cap C_2$.

以上のことから, $\mathrm{Fix}(P_1 P_2) \subset C_1 \cap C_2$.

3. [講義 **3**]

(i) [講義中に演習予定] T をヒルベルト空間 H 上で定義された非拡大写像とし, $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ とする。$\alpha \in (0,1)$ とし, $x_0 \in H$ とする。このとき, Krasnosel'skiĭ–Mann のアルゴリズム $x_{k+1} = \alpha x_k + (1-\alpha)T(x_k)$ で生成される点列 (x_k) が $x^\star \in \mathrm{Fix}(T)$ に弱収束することを証明しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(ii) [講義中に演習予定] 問題 (i) のもとで, Krasnosel'skiĭ–Mann のアルゴリズムが $\|x_k - T(x_k)\| = \mathcal{O}(1/\sqrt{k})$ を満たすことを証明しましょう。

解答例: 講義スライドにあります。

(iii) $B_i = B(\boldsymbol{c}_i, r_i)$ $(m = 1, 2, \ldots, m)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の閉球とし, $\bigcap_{i=1}^m B_i \neq \emptyset$ とする。また, B_i への射影を P_i とし, 写像 T_1 を $T_1 = P_1 P_2 \cdots P_m$ とし, T_2 を $T_2 = P_1(\sum_{i=2}^m w_i P_i)$ とする（ただし, $(w_i) \subset (0,1)$ は $\sum_{i=2}^m w_i = 1$ を満たす）。Krasnosel'skiĭ–Mann のアルゴリズム

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \alpha \boldsymbol{x}_k + (1-\alpha)T_1(\boldsymbol{x}_k),\ \boldsymbol{x}_{k+1} = \alpha \boldsymbol{x}_k + (1-\alpha)T_2(\boldsymbol{x}_k)$$

の挙動を計算機を用いて比較してみましょう。また, $\bigcap_{i=1}^m B_i = \emptyset$ の場合, Krasnosel'skiĭ–Mann のアルゴリズムがどのような挙動を示すか, 確認してみましょう。

解答例: `https://github.com/iiduka-researches/fixed-point` を参照して下さい。