

Research Memorandum No. 704

# 正規確率場の最大値の分布

— tube の方法と Euler 標数の方法 —

栗木 哲 (統計数理研究所)

竹村 彰通 (東京大学経済学部)

1998年11月

# 正規確率場の最大値の分布

— tube の方法と Euler 標数の方法 —

栗木 哲 (統計数理研究所)

竹村 彰通 (東京大学経済学部)

1998年11月

## 概要

$X(t), t \in I$ , を平均0, 分散1の正規確率場で  $X(t) = \sum_{i=1}^p \phi^i(t) z_i$  と表されるものとする. ここで  $z_i$  は独立な標準正規変量,  $\phi^i(t)$  は  $I$  上の滑らかな関数である. また同じ記号を用いて確率場  $U(t) = \sum_{i=1}^p \phi^i(t) y_i$  を定義する. ただし  $(y_1, \dots, y_p)$  を単位球面上の一様分布に従う長さ1の確率ベクトルとする. 本論文では最初に, これらの確率場の最大値の分布の上側裾確率を求めるための tube の方法について解説する. 次に, 同じ目的のためのもう一つの方法である Euler 標数の方法の考え方を説明する. さらに確率場  $X(t), U(t)$  の場合においては Euler 標数の方法は tube の方法に帰着されることを示す. またそのことから tube の方法によって得られる裾確率の漸近展開の係数と添字集合の Euler 標数との間の関係式を証明する. 最後に例題として, 対称正規分布の最大固有値分布の裾確率の漸近展開を示す.

## 1 はじめに

### 1.1 問題の設定

$X(t), t \in I$ , を平均0, 分散1の正規確率場 (Gaussian random field) とする. ここで  $I$  は  $d$ 次元の添字集合である. また共分散関数 (自己相関関数) を  $r(s, t)$  とおく. すなわち  $E[X(t)] = 0, E[X(t)^2] = 1, E[X(s)X(t)] = r(s, t)$  である. 本論文ではこの確率場の最大値の分布の上側裾確率

$$P\left(\sup_{t \in I} X(t) \geq x\right) \quad (1.1)$$

の  $x \rightarrow \infty$  での漸近的挙動について論じる.

---

キーワード: Gauss-Bonnet の定理, Karhunen-Loève 展開, 積分幾何学, 裾確率, tube 公式, 漸近展開.

本論文では特に確率場  $X(t)$  が次の表現を持つ場合を考える.

$$X(t) = \phi(t)'z = \sum_{i=1}^p \phi^i(t)z_i, \quad t \in I. \quad (1.2)$$

ここで  $z = (z_1, \dots, z_p)'$  はその成分が互いに独立に標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う確率ベクトル, すなわち  $z \sim N_p(0, I_p)$  であり,  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^p)'$  は  $R^p$  に値をとる関数である. 分散が 1 であるという制約より

$$\|\phi(t)\|^2 = \sum_{i=1}^p \phi^i(t)^2 = 1, \quad \forall t \in I, \quad (1.3)$$

である. 同様に

$$r(s, t) = \phi(s)'\phi(t) = \sum_{i=1}^p \phi^i(s)\phi^i(t)$$

であることにも注意する.

$y = (y_1, \dots, y_p)'$  を  $z/\|z\|$  を  $S^{p-1}$  ( $p-1$  次元単位球面) 上の一様分布  $\text{Unif}(S^{p-1})$  に従う長さ 1 の確率ベクトルとし, (1.2) と同じ記号を用いて確率場

$$U(t) = \phi(t)'y = \sum_{i=1}^p \phi^i(t)y_i, \quad t \in I, \quad (1.4)$$

を定義する. この確率場の最大値分布の上側裾確率

$$P\left(\sup_{t \in I} U(t) \geq x\right) \quad (1.5)$$

についても (1.1) と併せて論じることにする.

ところで扱う正規確率場を (1.2) の形に限定することはやや強い制約のように思われるかも知れない. しかし正規確率場はゆるやかな正則条件のもとで Karhunen-Loève 展開

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi^i(t) z_i \quad \text{a.s.}$$

を持つことが知られている (例えば Adler (1981), §3.3). ここで  $\lambda_i, \varphi^i$  は  $r(s, t)$  を積分核とする積分方程式の固有値, 固有関数である. Karhunen-Loève 展開が有限項で打ち切られる場合 (さらに言えば十分大きな項数をとることにより  $X(t)$  が有限項数展開で近似できる場合) には (1.2) の形の確率場を扱えば十分であることになる.

次に  $I$  と  $\phi$  に関する仮定をおく.  $\phi$  の像を

$$M = \phi(I) = \{\phi(t) \in R^p \mid t \in I\}$$

とおく. (1.3) より  $M$  は  $S^{p-1}$  の部分集合である.  $M$  に関して次の仮定をおく.

**仮定 1.1**  $M \subset S^{p-1}$  は  $d$  次元  $C^2$  級縁なし部分多様体である.

以上までの問題設定において、添字  $t$  は  $u = \phi(t)$  の形でのみ問題に係わっている。従って  $M$  自身を添字集合と考えた確率場  $u'z$ ,  $u \in M$  (あるいは  $u'y$ ,  $u \in M$ ) の最大値の分布を議論していると考えられることもできる。仮定 1.1 より  $M$  は閉であるので、(1.1), (1.5) において  $\sup$  を達成する  $t \in I$  が存在することにも注意する。  $M$  が  $C^2$  多様体であることから、以降では問題の一般性を失うことなく  $\phi$  を  $C^2$  級の関数とし、  $u = \phi(t)$  を  $M$  の局所座標表示と考えることにする。このとき自己相関関数は

$$r(s, t) = 1 - \frac{1}{2} \|s - t\|^2 (1 + o(1)) \quad (s \rightarrow t) \quad (1.6)$$

である (より正確には (1.10) を参照)。Brownian motion のようにサンプルパスが滑らかでない確率場の場合は、その相関構造は (1.6) のようには表すことができないため、本論文の議論では扱うことができない。

添字集合が滑らかな場合の正規確率場の最大値分布の裾確率の導出の方法として、二種類の方法が知られている。一つは Sun (1993) による “tube の方法” である。Sun (1993) は Weyl (1939) のいわゆる tube 公式を用いることにより正規確率場 (1.2) の最大値の裾確率 (1.1) の漸近展開を与えた。Kuriki and Takemura (1998) は正規確率場の最大値の分布論と錐への射影の分布論 (Takemura and Kuriki (1997)) との関係を指摘し、tube の方法における漸近展開の誤差を具体的に与える方法を示した。本論文 2 節では Kuriki and Takemura (1998) の Section 3, Appendix B を要約する形で tube の方法を解説する。

確率場の最大値の裾確率を求めるためのもう一つの方法は Adler (1981), Worsley (1995) らによる “Euler 標数の方法” である。この方法は分布の正規性を仮定しないため tube の方法よりも汎用的な方法である。しかしながら後で詳しく説明するように、このアプローチの正当性に関しては、あまり多くのことが分かっていない。本論文では 3 節において、Euler 標数の方法を確率場  $X(t)$  (1.2) および  $U(t)$  (1.4) に適用する。その結果これらの場合においては Euler 標数の方法は tube の方法と同じ結果を導くことを示す。

論文の最後の 4 節においては例題として、対称正規分布と呼ばれる確率行列の最大固有値の分布の裾確率の漸近展開を与え、その精度を数値的に検証する。

ところで本論文では、仮定 1.1 にあるように添字集合  $M$  が縁を持たない場合 ( $\partial M = \emptyset$ ) を考えている。この仮定をおくことで問題は単純になり、その幾何学的構造もより明確になる。しかし一方で現実の問題ではこの仮定が満たされないことも多い。  $M$  が縁あり多様体の場合にも、境界  $\partial M$  が区分的に滑らかな場合には、  $\partial M$  を有限個の適当な次元の部分多様体に分割するという Takemura and Kuriki (1997) のアプローチにより、tube 法, Euler 標数法は原理的には適用可能である (栗木 (1997), 定理 4.1)。しかしまだ未整理の論点も多く、本論文では扱わないことにする。

## 1.2 幾何学的準備

仮定 1.1 より  $M = \phi(I)$  は  $R^p$  に埋め込まれた閉 Riemann 多様体である. この小節では  $M$  の幾何学的諸量に関する記法の準備を行う.

局所座標に関する微分を  $\frac{\partial}{\partial t^i} \phi(t) = \phi_i(t) = \phi_i$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial t^i \partial t^j} \phi(t) = \phi_{ij}(t) = \phi_{ij}$ , 等と下つきの添字により表す. これらは  $p$  次元ベクトルである. これらの諸量が  $u = \phi(t)$  での量であることを明示するために,  $\phi_i(u) = \phi_i(t)$ ,  $\phi_{ij}(u) = \phi_{ij}(t)$  とも書くことにする.  $u$  における  $M$  の接空間 (接平面) は

$$T_u(M) = \text{span}\{\phi_i(u) \mid i = 1, \dots, d\}$$

である. また  $u = \phi(t)$  における計量を

$$g_{ij}(u) = \phi_i(u)' \phi_j(u) = \frac{\partial^2}{\partial s^i \partial t^j} r(s, t) \Big|_{s=t}$$

とする.

$$du = \det(g_{ij}(u))^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^d dt^i \quad (1.7)$$

は  $u = \phi(t)$  における  $M$  の体積要素である.  $M$  の全体積は

$$\text{Vol}(M) = \int_M du$$

で与えられる.

$R^p$  において  $M$  を含む最小の錐を

$$K = \bigcup_{c \geq 0} cM = \{cu \in R^p \mid c \geq 0, u \in M\}$$

とおく. 定義より

$$M = K \cap S^{p-1}$$

である.  $u$  における  $K$  の接空間は

$$T_u(K) = \text{span}\{u\} \oplus T_u(M)$$

である. ここで  $\|\phi\| = 1$  より  $\phi_i' \phi = 0$  であるので  $\text{span}\{u\}$  と  $T_u(M)$  は  $R^p$  で直交している. 接空間の直交補空間  $T_u(K)^\perp$  の正規直交基底を

$$n_a(u), \quad a = 1, \dots, p - d - 1,$$

ただし

$$n_a(u)' n_b(u) = \delta_{ab} \quad (\text{Kronecker's delta})$$

とおく.  $\phi_i(u)$  が  $u$  の  $C^1$  級関数であるから,  $n_a(u)$  も  $u$  の  $C^1$  級関数と選ぶことができる.

次の量を定義する.

$$h_{ija}(u) = -\phi_{ij}(u)'n_a(u), \quad h_{ia}^j(u) = h_{ika}(u)g^{kj}(u). \quad (1.8)$$

ただし  $g^{ij}(u)$  は行列  $(g_{ij}(u))^{-1}$  の  $(i, j)$  成分である. また論文を通して Einstein の記法  $h_{ika}g^{kj} = \sum_{k=1}^d h_{ika}g^{kj}$  を用いることにする.  $T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}$  の要素は, 長さ 1 のパラメータ  $\bar{t} = (\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^{p-d-1})'$ ,  $\sum_{a=1}^{p-d-1} (\bar{t}^a)^2 = 1$ , を用いて

$$v = \bar{t}^a n_a(u)$$

と表すことができる.  $M$  の  $u$  における法線方向  $v \in T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}$  の第 2 基本形式  $H(u, v)$  は, その  $(i, j)$  成分が

$$\bar{t}^a h_{ia}^j(u)$$

で定義される  $d \times d$  行列である.

また次の量を定義する.

$$\Gamma_{ij,k}(u) = \phi_{ij}(u)' \phi_k(u), \quad \Gamma_{ij}^k(u) = \Gamma_{ij,l}(u)g^{lk}(u).$$

このとき  $\phi(t)$  の 2 階微係数は

$$\phi_{ij}(u) = -g_{ij}(u)u + \Gamma_{ij}^k(u)\phi_k(u) - h_{ija}(u)n_a(u) \quad (1.9)$$

と書くことができる. ((1.9) 右辺最終項においても和の記号  $\sum_{a=1}^{p-d-1}$  が省略されていることに注意する.)

$\phi_{ij}(t)$  は  $t$  の連続関数であるので,  $s \rightarrow t$  のとき

$$\phi(s) = \phi(t) + (s^i - t^i)\phi_i(t) + \frac{1}{2}(s^i - t^i)(s^j - t^j)\phi_{ij}(t)(1 + o(1))$$

である. 従って (1.9) より

$$r(s, t) = 1 - \frac{1}{2}(s^i - t^i)(s^j - t^j)g_{ij}(t)(1 + o(1)) \quad (1.10)$$

が成立する. これが (1.6) の正確な意味である.

## 2 tube の方法

### 2.1 tube と critical radius

$S^{p-1}$  上の 2 点間の距離を, 2 点を結ぶ大円の長さ

$$\text{dist}(u, v) = \cos^{-1}(u'v), \quad u, v \in S^{p-1},$$

で定義する.  $S^{p-1}$  の部分集合で  $M \subset S^{p-1}$  からの距離が  $\theta$  未満の領域

$$M_\theta = \{v \in S^{p-1} \mid \min_{u \in M} \text{dist}(u, v) < \theta\}$$

を,  $M$  を中心とする半径  $\theta$  の tube と呼ぶ.

集合  $C_\theta(u) \subset S^{p-1}$  を

$$C_\theta(u) = M_\theta \cap T_u(M)^\perp$$

とおく.  $C_\theta(u)$  は tube を点  $u$  で  $M$  に垂直に輪切りにしたときの断面を表す. 明らかに

$$M_\theta = \bigcup_{u \in M} C_\theta(u) \quad (2.1)$$

である. (2.1) が  $M_\theta$  の分割を与えるとき, すなわち  $u \neq v$  に対し  $C_\theta(u) \cap C_\theta(v) = \emptyset$  のとき,  $M_\theta$  は “自分自身で交わらない” と言うことにする.

$$\theta_c = \sup\{\theta \mid M_\theta \text{ は自分自身で交わらない}\}$$

を  $M$  の臨界半径 (critical radius) と呼ぶ. 与えられた  $M$  に対する  $\theta_c$  の具体的な値は Johansen and Johnstone (1990), Proposition 4.3 を多次元に拡張した次の定理によって求めることができる.

**定理 2.1** (Kuriki and Takemura (1998), Lemma 3.1)

$$\cot^2 \theta_c = \sup_{u, v \in M} \frac{1 - u' P_v u}{(1 - u' v)^2}.$$

ここで  $P_v$  は  $T_v(K) = \text{span}\{v\} \oplus T_v(M)$  への直交射影行列である.

次の事実は重要である.

**補題 2.1** (Kuriki and Takemura (1998), Remark 3.1)

仮定 1.1 を満たす  $M$  の critical radius  $\theta_c$  は正である.

## 2.2 tube の体積

$M_\theta$  を含む最小の錐を  $K_\theta = \bigcup_{c \geq 0} cM_\theta$  とおく. また 1.2 節と同様に  $M$  を含む最小の錐を  $K$  とする.  $R^p$  の点  $z$  が与えられたとき, その錐  $K$  への直交射影を  $z_K$  とおく. すなわち

$$\|z - z_K\| = \min_{y \in K} \|z - y\|$$

である. 一般に  $\|z_K\|$  は一意に定まるが  $z_K$  は一意には定まらない. しかしもし  $z \in K_{\theta_c}$  であるならば

$$\frac{z}{\|z\|} \in C_{\theta_c} \left( \frac{z_K}{\|z_K\|} \right)$$

でなければならないことから  $z_K$  も一意に定まる. このとき分解

$$z = z_K + (z - z_K) = ru + sv,$$

ただし  $r = \|z_K\|$ ,  $s = \|z - z_K\|$ ,

$$u = \frac{z_K}{r} \in M, \quad v = \frac{z - z_K}{s} \in T_u(K)^\perp \cap S^{p-1},$$

により一対一変換

$$z \leftrightarrow (r, u, s, v) \tag{2.2}$$

が定義される. このとき  $r^2 + s^2 = \|z\|^2$ , かつ

$$\max_{u \in M} u'z = r, \quad \max_{u \in M} \frac{u'z}{\|z\|} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}}$$

である.

変数変換 (2.2) は滑らか ( $C^1$  級) であり, その Jacobian を考えることができる. 次の命題は Weyl (1939) によるものである. (簡単な別証明は Kuriki and Takemura (1997), Appendix A を参照のこと.)

**補題 2.2**  $z \in K_{\theta_c}$  とする.

$$dz = \det(rI_d + sH(u, v)) dr du s^{p-d-2} ds dv.$$

ここで  $d \times d$  行列  $H(u, v)$  は  $M$  の  $u$  における法線方向  $v \in T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}$  の第2基本形式,  $du$  は  $M$  の  $u$  における体積要素 (1.7),  $dv$  は  $T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}$  ( $T_u(K)^\perp$  に制限された  $p-d-2$  次元単位球面) の体積要素である.

$S^{d-1}$  の体積を

$$\Omega_d = \text{Vol}(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

とおく. tube  $M_\theta$  の体積は次のように求められる.

**補題 2.3**  $\theta \leq \theta_c$  とする.

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M_\theta) &= \Omega_p \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} \bar{B}_{\frac{1}{2}(d+1-e), \frac{1}{2}(p-d-1+e)}(\cos^2 \theta), \\ w_{d+1-e} &= \frac{1}{\Omega_{d+1-e} \Omega_{p-d-1+e}} \int_M \left[ \int_{T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}} \text{tr}_e H(u, v) dv \right] du. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで  $\bar{B}_{m,n}(\cdot)$  は母数  $(m, n)$  のベータ分布の上側確率である. また  $\text{tr}_e(\cdot)$  で行列の固有値の  $e$  次基本対称式を意味するものとする.



(証明)  $y = z/\|z\|$  は  $S^{p-1}$  の上で一様に分布することから

$$\text{Vol}(M_\theta) = \text{Vol}(S^{p-1}) P(y \in M_\theta) = \Omega_p P(z \in K_\theta)$$

である. 補題 2.2 より  $z \sim N_p(0, I_p)$  のときの  $(r, u, s, v)$  の同時密度が分かる.  $\theta \leq \theta_c$  ならば

$$z \in K_\theta \Leftrightarrow \frac{s}{r} < \tan \theta$$

であるので

$$\begin{aligned} P(z \in K_\theta) &= P(s < r \tan \theta) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{0 \leq s < r \tan \theta} \int_M \int_{T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}} e^{-\frac{1}{2}(r^2+s^2)} \\ &\quad \times \det(rI_d + sH(u, v)) s^{p-d-2} dr ds du dv \end{aligned}$$

である. ここで公式

$$\det(xI_d + A) = \sum_{e=0}^d x^{d-e} \text{tr}_e(A) \quad (2.4)$$

を用いて行列式を展開し,  $r$  と  $s$  について項別積分することにより定理を得る.  $dv$  に関する積分の対称性から,  $e$  が奇数のとき積分は 0 になることに注意する. ■

## 2.3 最大値の裾確率

ところで  $y \in M_\theta \Leftrightarrow \max_{u \in M} u'y > \cos \theta$  であることから, tube の体積に関する補題 2.3 は, 裾確率 (1.5) をも同時に与えていることになる.

**定理 2.2**  $x \geq \cos \theta_c$  とする.

$$P\left(\max_{t \in I} U(t) \geq x\right) = \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} \bar{B}_{\frac{1}{2}(d+1-e), \frac{1}{2}(p-d-1+e)}(x^2). \quad (2.5)$$

ただし  $w_{d+1-e}$  は補題 2.3 で与えた係数 (2.3) である.

次の定理は, (1.2) で定義された正規確率場  $X(t)$ ,  $t \in I$ , の最大値の裾確率の漸近展開を与える.

**定理 2.3**  $x \rightarrow \infty$  のとき

$$P\left(\max_{t \in I} X(t) \geq x\right) = \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} \bar{G}_{d+1-e}(x^2) + O(\bar{G}_p(x^2(1 + \tan^2 \theta_c))). \quad (2.6)$$

ただし  $w_{d+1-e}$  は定理 2.2 と同じもの,  $\bar{G}_m(\cdot)$  は自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布の上側確率である.

(証明)  $z \sim N_p(0, I_p)$  が  $K_{\theta_c}$  に含まれる場合とそうでない場合に分けて事象  $\max_{t \in I} X(t) = \max_{u \in M} u'z \geq x$  の確率を評価する.

(i)  $z \in K_{\theta_c}$  の場合. この場合は変換 (2.2) が一意に定まり,  $\max_{u \in M} u'z = r$  である. 補題 2.3 の証明と同様にして

$$\begin{aligned} P\left(\max_{u \in M} u'z \geq x, z \in K_{\theta_c}\right) &= P\left(r \geq x, s < r \tan \theta_c\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{\substack{r \geq x \\ 0 \leq s < r \tan \theta_c}} \int_M \int_{T_u(K)^+ \cap S^{p-1}} e^{-\frac{1}{2}(r^2+s^2)} \\ &\quad \times \det(rI_d + sH(u, v)) s^{p-d-2} dr ds du dv \end{aligned} \quad (2.7)$$

である. ところで (2.7) 右辺において  $r$  と  $s$  の積分範囲を操作し

$$\int_{\substack{r \geq x \\ 0 \leq s < r \tan \theta_c}} \int = \int_{\substack{r \geq x \\ 0 \leq s < \infty}} \int - \int_{\substack{r \geq x \\ s \geq r \tan \theta_c}} \int$$

と分割する. 右辺第 2 項の積分を考える.  $r \geq x, s \geq r \tan \theta_c \Rightarrow r^2 + s^2 \geq x^2(1 + \tan^2 \theta_c)$  であるので, 右辺第 2 項は

$$\int_{r^2+s^2 \geq x^2(1+\tan^2 \theta_c)} \int e^{-\frac{1}{2}(r^2+s^2)} (r, s \text{ の } p-2 \text{ 次斉次多項式}) dr ds$$

の形の積分でその絶対値が上から押えられる. これは  $O(\bar{G}_p(x^2(1 + \tan^2 \theta_c)))$  であることが容易に分かる.

(ii)  $z \notin K_{\theta_c}$  の場合. この場合は

$$\frac{\|z - z_K\|}{\|z_K\|} \geq \tan \theta_c$$

であるので

$$\|z\|^2 = \|z_K\|^2 \left(1 + \frac{\|z - z_K\|^2}{\|z_K\|^2}\right) \geq \|z_K\|^2(1 + \tan^2 \theta_c)$$

である. 一方

$$\|z_K\| = \max\left(\max_{u \in M} u'z, 0\right)$$

であるので,  $x \geq 0$  に対し

$$\begin{aligned} P\left(\max_{u \in M} u'z \geq x, z \notin K_{\theta_c}\right) &= P(\|z_K\| \geq x, z \notin K_{\theta_c}) \\ &\leq P(\|z\|^2 \geq x^2(1 + \tan^2 \theta_c), z \notin K_{\theta_c}) \leq \bar{G}_p(x^2(1 + \tan^2 \theta_c)) \end{aligned}$$

である.

(i), (ii) より

$$P\left(\max_{u \in M} u'z \geq x\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{r=x}^{\infty} \int_{s=0}^{\infty} \int_M \int_{T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}} e^{-\frac{1}{2}(r^2+s^2)} \\ \times \det(rI_d + sH(u, v)) s^{p-d-2} dr ds du dv \\ + O(\bar{G}_p(x^2(1 + \tan^2 \theta_c)))$$

である. (2.4) を用いて行列式を展開し, 項別に積分することにより定理を得る. ■

### 3 Euler 標数の方法

#### 3.1 excursion 集合の Euler 標数

確率場の最大値の裾確率の近似のためのもう一つの方法に Adler (1981), Worsley (1995) らによる Euler 標数の方法がある. この方法は tube の方法とは異なり, 正規確率場 (1.2) (およびその変形である (1.4)) 以外の一般の確率場にも適用可能である. 最初にこの方法の基本的な考え方を (1.2) の正規確率場  $X(t)$  の場合に即して説明する.

1 節に述べたように  $M = \phi(I)$  を  $X(t)$  の添字集合と考える. 確率場がある閾値  $x$  以上であるような添字の全体  $A_x$  を確率場  $X(t)$  の excursion 集合と呼ぶ. ここではすなわち

$$A_x = \{\phi(t) \in M \mid X(t) \geq x\} = \{u \in M \mid u'z \geq x\}$$

である. 定義より

$$P\left(\max_{t \in I} X(t) \geq x\right) = P(A_x \neq \emptyset)$$

である.  $\chi(A_x)$  を集合  $A_x$  の Euler 標数 (Euler characteristic) とする. Euler 標数の方法とは, 大きな  $x$  について

$$P(A_x \neq \emptyset) \approx E[\chi(A_x)] \tag{3.1}$$

と近似することにより, 最大値の分布の裾確率を

$$P\left(\max_{t \in I} X(t) \geq x\right) \approx E[\chi(A_x)] \tag{3.2}$$

とおく方法である.

近似式 (3.1) を説明する直観的な議論は次のようなものである. Euler 標数は整数に値をとる位相不変量であるが, 特に

$$\chi(A_x) = \begin{cases} 1 & (A_x \text{ が一点にホモトピー同値の場合}) \\ 0 & (A_x = \emptyset) \end{cases}$$

である. 閾値  $x$  が大きい場合を考える. まず  $x$  が非常に大きくて  $\max_{u \in M} u'z < x$  であれば  $A_x = \emptyset$  である. 次にもしちょうど  $\max_{u \in M} u'z = x$  であれば,  $z \sim N_p(0, I_p)$  であるので最大

を達成する  $u = u^* \in M$  は確率 1 で一意に定まり  $A_x = \{u^*\}$  である. また  $\max_{u \in M} u'z > x$  の場合であっても,  $x$  が十分に大きく  $\max_{u \in M} u'z \approx x$  であるならば 1 に近い確率で  $A_x$  は  $u^*$  を含む小領域 (連結で一点集合  $\{u^*\}$  にホモトピー同値な) となるであろう. 以上の議論により,  $I(\cdot)$  を事象の定義関数とすると,  $x$  が大きいとき 1 に近い確率で

$$I(A_x \neq \emptyset) \approx \chi(A_x)$$

であることが予想される. この両辺の期待値を取ることで近似式 (3.1) が得られる.

以上に述べたように, Euler 標数の方法はその導出過程に直観的議論 (3.1) を含む. そのため, そこから得られる近似式 (3.2) がどのような意味で成り立つかは, 個別の確率場に立ち戻って検証されなければならない. しかしこのことに関する議論はあまりなされてはいなかったようである (Cao and Worsley (1998), Section 3 の導入部を参照). ところで最近になって Adler (1998), Theorem 4.5.2 は, Euclid 空間の部分集合を添字集合に持つ正規確率場が “等方的 (isotropic)” な場合には, 適当な正則条件のもとで Euler 標数の方法により導かれる裾確率の近似式 (Adler (1998), Theorem 3.3.5) は既に知られている裾確率の漸近展開式 (Piterbarg (1996), Theorem 5.1) と全ての項にわたって一致することを確認した. ただし Adler (1998), Theorem 3.3.5 は Minkowski functional の議論を援用しているためその導出はやや分かりにくいものになっている. (isotropic の定義は Adler (1981), §2.5 を参照.)

本節では最初に, 正規確率場  $X(t)$  (1.2) に Euler 標数法を適用すると 2 節の tube 法と全く同じ漸近展開式が得られることを示す. これは正規確率場  $X(t)$  においては Euler 標数法の近似 (3.1) は正当であることを意味する. そしてその計算の過程より tube 法による裾確率の漸近展開式に含まれる係数  $w_{d+1-e}$  (2.3) と添字集合の Euler 標数  $\chi(M)$  との関係式を導く. また (1.4) で定義される確率場  $U(t)$  に Euler 標数の方法を適用する. この場合も  $X(t)$  の場合と同様に Euler 標数法は tube 法と全く同じ近似式を与えることが示される.

## 3.2 Morse の定理

この小節では最初に excursion 集合の Euler 標数の期待値  $E[\chi(A_x)]$  の計算に必要な Morse の定理について簡単に説明する.

$d$  次元のコンパクトで縁のない  $C^2$  多様体  $M$  と  $M$  上の実数値関数  $f(u)$ ,  $u \in M$ , が与えられているとする.  $M$  の局所座標を  $u = \phi(t)$ ,  $t = (t^1, \dots, t^d)'$ , とするとき

$$\frac{\partial}{\partial t^i} f \Big|_{u=\phi(t)} = 0, \quad i = 1, \dots, d,$$

を満たす  $u = u^* \in M$  を  $M$  の臨界点 (critical point) と呼ぶ.  $x = f(u^*)$  となる critical point  $u^*$  が存在するような  $x$  を臨界値 (critical value) と呼ぶ. 全ての critical point  $u^*$  に

においてその Hesse 行列が非退化の場合, すなわち

$$\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^j} \Big|_{u=u^*} \right) \neq 0$$

のとき,  $f$  を Morse 関数と呼ぶ.  $f$  が Morse 関数ならば明らかに  $-f$  も Morse 関数である.

次の命題は Morse の定理 (例えば Morse and Cairns (1969), Theorem 10.2') の一つの変形である.

**補題 3.1**  $f$  を  $M$  上の Morse 関数とし,  $x$  は  $f$  の critical value でないとする. このとき

$$\chi(\{u \mid f(u) \leq x\}) = \sum_{u^*: f(u^*) \leq x} \operatorname{sgn} \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^j} \Big|_{u=u^*} \right)$$

が成立する. ただし  $u^*$  は  $f$  の critical point, また  $\operatorname{sgn}$  は符号関数である.

$d = \dim M = 2$  の場合の補題 3.1 の証明は, 佐々木 (1977), 定理 5.3 が分かりやすい.

ところで仮定 1.1 を満たす  $M \subset S^{p-1}$  を添字集合としてみたときの確率場  $u'z$ ,  $u'y$ ,  $u \in M$ , はともに  $M$  上の滑らかな関数である. 以下の命題は, これらの確率場が Morse 関数であることを主張する.

**補題 3.2**  $z \sim N_p(0, I_p)$ ,  $y = z/\|z\| \sim \operatorname{Unif}(S^{p-1})$  とする.  $M$  は仮定 1.1 を満たすとする. このとき  $M$  上の関数  $u'z$ ,  $u'y$  は確率 1 で Morse 関数である.

(証明) 固定した  $z$  に対し  $u'z$  が Morse 関数でないとする. このとき  $u^* \in M$  が存在し

$$\phi_i(u^*)'z = 0 \tag{3.3}$$

$$\det(\phi_{ij}(u^*)'z) = 0 \tag{3.4}$$

である. ところで (3.3) より, 適当な  $r, \bar{t} = (\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^{p-d-1})'$  を用いて  $z = ru^* + \bar{t}^a n_a(u^*)$  と書くことができる. これを (3.4) に代入し (1.9) に注意して変形すると

$$\det(rI_d + \bar{t}^a H_a(u^*)) = 0$$

でなければならないことが分かる. ただし  $H_a(u)$  は  $h_{ia}^j(u)$  (1.8) を  $(i, j)$  成分とする  $d \times d$  行列である. いま  $\lambda_m(\cdot)$  で行列の第  $m$  固有値を表すとすると

$$\exists m \quad r = -\lambda_m(\bar{t}^a H_a(u^*))$$

でなければならない. 従って

$$z \in \bigcup_{m=1}^d \{-\lambda_m(\bar{t}^a H_a(u))u + \bar{t}^a n_a(u) \mid u \in M, \bar{t} \in R^{p-d-1}\} \tag{3.5}$$

である必要がある. ところで (3.5) の右辺は  $p-1$  次元集合  $M \times R^{p-d-1}$  の, 区分的に滑らかな連続写像の像の和であり, その Lebesgue 測度は 0 である. 従って  $u/z$  が Morse 関数でない確率は 0 である.

$u'y = u'z/\|z\|$  が Morse 関数でないと仮定した場合も,  $z$  は (3.5) を満たす必要がある. その確率は 0 である. ■

補題 3.1 において Morse 関数  $f(u)$  として確率場の負数  $-u'z, -u'y$  をとり, 任意の特定の値  $x$  が critical value となる確率が 0 であることに注意すれば次の命題が得られる.

**補題 3.3**  $z, y, M$  は補題 3.2 と同じものとする.

$$A_x = \{u \in M \mid u'z \geq x\}, \quad B_x = \{u \in M \mid u'y \geq x\} \quad (3.6)$$

とおく. このとき確率 1 で

$$\chi(A_x) = \sum_{u^*} I(u'^*z \geq x) \operatorname{sgn} \det(-\phi_{ij}(u^*)'z) \quad (3.7)$$

$$\chi(B_x) = \sum_{u^*} I(u'^*y \geq x) \operatorname{sgn} \det(-\phi_{ij}(u^*)'y) \quad (3.8)$$

が成立する. ただし和  $\sum_{u^*}$  は確率場  $u'z, u'y$  の critical point  $u^*$  についてとるものとする.

### 3.3 $\chi(A_x)$ の期待値

以上の準備のもとで excursion 集合  $A_x, B_x$  の Euler 標数の期待値を具体的に評価することができる. 最初に  $E[\chi(A_x)]$  に関する結果を述べる.  $M = \phi(I)$  の滑らかさに関して仮定 1.1 よりもやや強い仮定をおく.

**仮定 3.1**  $M \subset S^{p-1}$  は  $d$  次元  $C^3$  級縁なし部分多様体である.

**定理 3.1**  $A_x$  を補題 3.3 で定義された excursion 集合とする.  $M$  について仮定 3.1 を仮定する. このとき以下が成立する.

$$E[\chi(A_x)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_M E[I(\tilde{z}_0 \geq x) \det(\tilde{z}_0 I_d + H_a(u)\tilde{z}_a)] du \quad (3.9)$$

ただし  $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{p-d-1}$  は独立に  $N(0, 1)$  に従う確率変数, また  $du$  は  $M$  の体積要素 (1.7) である.

(証明) 以下の証明は Worsley (1995), Theorem 2 の証明に沿ったものである.

$R^d$  の確率密度関数

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\varepsilon^d \pi^{\frac{d}{2}}} & (\|x\| < \varepsilon) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を定義する. このとき  $\int_{R^p} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$  である. (3.7) において, critical point  $u^*$  は全て孤立点である (佐々木 (1977), 定理 5.2) ので, 和  $\sum_{u^*}$  は積分

$$\chi(A_x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M I(u'z \geq x) \operatorname{sgn} \det(-\phi_{ij}(u)'z) \delta_\varepsilon(\nabla u'z) J_u \prod_{i=1}^d dt^i$$

で置き換えることができる. ただし  $\nabla u'z = (\phi_1(u), \dots, \phi_d(u))'z \in R^p$ ,

$$J_u = \left| \det \left( \frac{\partial \nabla u'z}{\partial t} \right) \right| = \left| \det(\phi_{ij}(u)'z) \right|$$

である. ここで

$$\operatorname{sgn} \det(-\phi_{ij}(u)'z) J_u = \det(-\phi_{ij}(u)'z)$$

に注意する.

もし積分  $\int_M du$  と極限操作  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  が交換可能ならば

$$E[\chi(A_x)] = \int_M \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E[I(u'z \geq x) \det(-\phi_{ij}(u)'z) \delta_\varepsilon(\nabla u'z)] \prod_{i=1}^d dt^i$$

である. ところで上式の右辺の被積分関数は容易に

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E[E[I(u'z \geq x) \det(-\phi_{ij}(u)'z) | \nabla u'z] \delta_\varepsilon(\nabla u'z)] \\ &= E[I(u'z \geq x) \det(-\phi_{ij}(u)'z) | \nabla u'z = 0] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E[\delta_\varepsilon(\nabla u'z)] \end{aligned}$$

であることが分かる. ここで  $\nabla u'z = 0$  のときは (1.9) より

$$\det(-\phi_{ij}(u)'z) = \det(u'z I_d + H_a(u) n_a(u)'z) \det(g_{ij}(u))$$

であるがこれは  $\nabla u'z$  と独立である. また  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E[\delta_\varepsilon(\nabla u'z)]$  は  $\nabla u'z$  の密度関数の原点 0 での値

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \det(g_{ij}(u))^{\frac{1}{2}}}$$

である.  $u'z = \tilde{z}_0$ ,  $n_a(u)'z = \tilde{z}_a$  ( $a = 1, \dots, p - d - 1$ ) と変数を置き換えると (3.9) が得られる.

積分と極限操作が交換可能であることは, 本定理の仮定の下で Worsley (1995) の条件 C1-C3 が満たされ, それにより Adler (1981), Theorem 5.2.1 と同様の議論ができることによる. ■

さらに (3.9) は次のように書き換えることができる.

**定理 3.2** 定理 3.1 と同じ条件を仮定する. このとき

$$E[\chi(A_x)] = \begin{cases} \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} (1 - G_{d+1-e}(x^2)) & (x \geq 0) \\ \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} (1 + (-1)^d G_{d+1-e}(x^2)) & (x < 0) \end{cases} \quad (3.10)$$

と書くことができる. ただし  $w_{d+1-e}$  は (2.3) で与えられた係数,  $G_m(\cdot)$  は自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布の分布関数である.

(証明) (3.9) において  $s = \sqrt{\sum_{a=1}^{p-d-1} (\tilde{z}_a)^2}$ ,  $v = n_a(u) \tilde{z}_a / s$  とおくと

$$H_a(u) \tilde{z}_a = sH(u, v)$$

である. ここで  $s$  は密度関数

$$\frac{2}{2^{\frac{p-d-1}{2}} \Gamma(\frac{p-d-1}{2})} s^{p-d-2} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

を持つ  $\chi(p-d-1)$  分布に従い,  $v$  は密度関数

$$\frac{1}{\Omega_{p-d-1}} dv \quad (dv \text{ は体積要素}) \quad (3.11)$$

を持つ  $T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}$  上の一様分布に従う. これらから

$$E[\chi(A_x)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{\tilde{z}_0=x}^{\infty} \int_{s=0}^{\infty} \int_M \int_{T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{z}_0^2 + s^2)} \\ \times \det(\tilde{z}_0 I_d + sH(u, v)) s^{p-d-2} d\tilde{z}_0 ds du dv$$

と書けることが分かる. (2.4) を用いて行列式を展開し項別に積分することにより (3.10) を得る. ■

ところで  $x \geq 0$  のときの (3.10) と, (2.6) 右辺第 1 項は全く同じ形をしている. すなわち確率場  $X(t)$  (1.2) に Euler 標数法を用いると, tube 法と全く同じ漸近展開式が導かれることが分かる. Euler 標数法の近似 (3.2) における “ $\approx$ ” は, 確率場  $X(t)$  の場合には次のように正当化されたことになる.

**系 3.1** 定理 3.1 と同じ条件を仮定する.  $x \rightarrow \infty$  のとき

$$P\left(\max_{u \in M} u'z \geq x\right) = E[\chi(A_x)] + O(\bar{G}_p(x^2(1 + \tan^2 \theta_c))).$$

ただし  $\theta_c$  は  $M$  の critical radius.



次に逆の  $x \rightarrow -\infty$  の場合を考える。  $A_{-\infty} = M$  であるので、次の関係式が得られることになる。

**系 3.2**  $M$  は仮定 3.1 を満たすとする。  $d = \dim(M)$  とおく。このとき

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} & (d \text{ は偶数}) \\ 0 & (d \text{ は奇数}) \end{cases} \quad (3.12)$$

である。ただし  $w_{d+1-e}$  は (2.3) で与えられた係数。

$d$  が偶数の場合の関係式 (3.12) は、偶数次元閉 Riemann 多様体における Gauss-Bonnet の定理 (例えば佐々木 (1950), §2) の一つの表現である。

### 3.4 $\chi(B_x)$ の期待値

excursion 集合  $B_x$  (3.6) の Euler 標数の期待値についても  $A_x$  の場合とほぼ同様の議論ができる。

**定理 3.3**  $B_x$  を補題 3.3 で定義された excursion 集合とする。  $M$  について仮定 3.1 を仮定する。このとき以下が成立する。

$$E[\chi(B_x)] = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{p-d}{2})} \int_M E[I(\tilde{y}_0 \geq x) \det(\tilde{y}_0 I_d + H_a(u) \tilde{y}_a)] du. \quad (3.13)$$

ただし  $\tilde{y} = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{p-d-1})'$  は  $S^{p-d-1}$  上の一様分布に従う確率ベクトル、  $du$  は  $M$  の体積要素 (1.7) である。

(証明) 確率場  $u'y$  ( $y \sim \text{Unif}(S^{p-1})$ ) においても Worsley (1995) の条件 C1-C3 が満たされているので定理 3.1 の証明と同じ議論をすることができる。

$$\begin{aligned} E[\chi(B_x)] &= \int_M E[I(u'y \geq x) \det(u'y I_d + H_a(u) n_a(u)' y) \mid \nabla u'y = 0] \\ &\quad \times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E[\delta_\varepsilon(\nabla u'y)] \det(g_{ij}(u))^{\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

である。ところで  $u$  を固定して考えると、局所座標をとりなおすことにより  $g_{ij}(u) = \delta_{ij}$  とすることができる。このとき

$$(u, n_1(u), \dots, n_{p-d-1}(u), \phi_1(u), \dots, \phi_d(u))' y$$

は  $u$  に無関係に  $S^{p-1}$  上一様に分布する。いま  $\nabla u'y = (\phi_1(u), \dots, \phi_d(u))' y$  とおけば

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \|\nabla u'y\|^2}} (u, n_1(u), \dots, n_{p-d-1}(u))' y$$

は  $\nabla u'y$  と独立に分布  $\text{Unif}(S^{p-d-1})$  に従う. このことから条件  $\nabla u'y = 0$  を与えたとき

$$\tilde{y} = (u, n_1(u), \dots, n_{p-d-1}(u))'y$$

は分布  $\text{Unif}(S^{p-d-1})$  に従うことが分かる.

また  $\|\nabla u'y\|^2$  がベータ分布  $B(\frac{d}{2}, \frac{p-d}{2})$  に従うことより

$$P(\|\nabla u'y\|^2 < \varepsilon^2) = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1) \Gamma(\frac{p-d}{2})} \varepsilon^d (1 + o(1)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

従って

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E[\delta_\varepsilon(\nabla u'y)] = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{p-d}{2})}$$

である. 以上をまとめると, (3.13) を得る. ■

さらに (3.13) は次のように書き換えることができる.

**定理 3.4** 定理 3.3 と同じ条件を仮定する. このとき

$$E[\chi(B_x)] = \begin{cases} \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} \left(1 - B_{\frac{1}{2}(d+1-e), \frac{1}{2}(p-d-1+e)}(x^2)\right) & (0 \leq x \leq 1) \\ \sum_{\substack{e=0 \\ e:\text{even}}}^d w_{d+1-e} \left(1 + (-1)^d B_{\frac{1}{2}(d+1-e), \frac{1}{2}(p-d-1+e)}(x^2)\right) & (-1 \leq x < 0) \end{cases} \quad (3.14)$$

と書くことができる. ただし  $w_{d+1-e}$  は (2.3) で与えられた係数,  $B_{m,n}(\cdot)$  は母数  $(m, n)$  のベータ分布の分布関数である.

(証明) (3.13) において

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{y}_0^2}} (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{p-d-1})'$$

は  $\tilde{y}_0$  と独立に  $S^{p-d-2}$  の上で一様に分布する. 従って

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{y}_0^2}} n_a(u) \tilde{y}_a$$

は  $\tilde{y}_0$  と独立に  $T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}$  の上で一様に分布する. また

$$H_a(u) \tilde{y}_a = \sqrt{1 - \tilde{y}_0^2} H(u, v)$$

である. ここで  $\tilde{y}_0$  は, その 2 乗  $\tilde{y}_0^2$  が  $B(\frac{1}{2}, \frac{p-d-1}{2})$  に従いその符号  $\text{sgn } \tilde{y}_0$  が確率  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  で正負をとる確率変数であるので, その密度関数は

$$\frac{\Gamma(\frac{p-d}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{p-d-1}{2})} (1 - \tilde{y}_0^2)^{\frac{p-d-1}{2}-1} d\tilde{y}_0 \quad (-1 \leq \tilde{y}_0 \leq 1)$$

である.  $v$  の密度関数 (3.11) と併せて (3.13) を書き換えると

$$E[\chi(B_x)] = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_{\tilde{y}_0=x}^1 \int_M \int_{T_u(K)^\perp \cap S^{p-1}} (1 - \tilde{y}_0^2)^{\frac{p-d-1}{2}-1} \\ \times \det(\tilde{y}_0 I_d + \sqrt{1 - \tilde{y}_0^2} H(u, v)) d\tilde{y}_0 du dv$$

と書けることが分かる. (2.4) を用いて行列式を展開し項別に積分することにより (3.14) を得る. ■

ところで  $x \geq 0$  のときの (3.14) と, (2.5) 右辺は式として等しく, 確率場  $U(t)$  (1.4) においても Euler 標数法と tube 法は同等であることが分かる. 確率場  $U(t)$  の場合には Euler 標数法の近似 (3.2) は, 次のように正当化されたことになる.

**系 3.3** 定理 3.3 と同じ条件を仮定する.  $x \geq \cos \theta_c$  ならば

$$P\left(\max_{u \in M} u'y \geq x\right) = E[\chi(B_x)].$$

ただし  $\theta_c$  は  $M$  の critical radius.

## 4 対称正規分布の最大固有値の分布

この節では一つの例を通して正規確率場の最大値の上側確率 (1.1) が定理 2.3 で与えられる漸近展開で精度良く近似されること, またその際に系 3.2 が実際に成り立っていること, を確認する.

$A = (a_{ij})$  を  $q \times q$  実対称行列でその対角および上三角成分が独立に正規分布

$$a_{ii} \sim N(0, 1), \quad \sqrt{2} a_{ij} \sim N(0, 1) \quad (i < j)$$

に従う確率行列とする. 同時分布は

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}p(p+1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\text{tr} A^2\right\} \cdot 2^{\frac{1}{4}p(p-1)} \prod_{i \leq j} da_{ij}$$

と書くことができる. この行列  $A$  の従う分布を (平均 0 の) 対称正規分布と呼ぶことにする. 対称正規分布は Wishart 分布の自由度無限大の極限分布であり, 多変量解析の漸近分布理論にしばしば現れる重要な分布である. 本節では, 前節までの理論の応用として,  $A$  の最大固有値  $\lambda_1(A)$  の分布の裾確率について論じる.

$q \times q$  実対称行列の全体を  $\text{Sym}(q)$  とおく. ここでは対応

$$A = (a_{ij}) \in \text{Sym}(q) \leftrightarrow (a_{11}, \dots, a_{qq}, \sqrt{2}a_{12}, \dots, \sqrt{2}a_{q-1,q}) \in R^{\frac{1}{2}q(q+1)}$$

により  $\text{Sym}(q)$  と  $R^{\frac{1}{2}q(q+1)}$  を同一視することにする. このとき  $\text{Sym}(q)$  の標準的内積は

$$\text{tr}(BC), \quad B, C \in \text{Sym}(q),$$

である. この同一視のもとで  $q \times q$  対称正規分布は  $R^{\frac{1}{2}q(q+1)}$  の標準正規分布  $N_{\frac{1}{2}q(q+1)}(0, I_{\frac{1}{2}q(q+1)})$  に対応する.

対称行列  $A$  の最大固有値は二次形式の最大値であるので

$$\lambda_1(A) = \max_{h \in S^{q-1}} h'Ah = \max_{h \in S^{q-1}} \text{tr}(hh'A) = \max_{H \in M_q} \text{tr}(HA)$$

と書くことができる. ただし

$$M_q = \{hh' \in \text{Sym}(q) \mid h \in S^{q-1}\}$$

とおいた. ここで  $\text{tr}((hh')^2) = 1$  であるので  $M_q$  は  $\text{Sym}(q)$  の単位球面  $S^{\frac{1}{2}q(q+1)-1}$  :

$$\{H \in \text{Sym}(q) \mid \text{tr}(H^2) = 1\}$$

の部分集合である.  $M_q$  は縁がなく滑らかな多様体であり, 明らかに仮定 3.1 を満たしている. 以上の考察から, 最大固有値  $\lambda_1(A)$  は, 平均 0, 分散 1 の正規確率場

$$\text{tr}(HA), \quad H \in M_q,$$

の最大値と解釈することができる. その分布の裾確率は tube 法 (あるいは今の場合と同じことであるが Euler 標数法) で求めることができる.

以下の結果は, Kuriki and Takemura (1998), Theorem 5.1, 5.2 の一部である.  $d = \dim(M_q) = q - 1$  に注意する.

**定理 4.1** 多様体  $M_q$  に対応する係数 (2.3) で非零のものは

$$w_{d+1-e} = w_{q-e} = \frac{2^{\frac{1}{2}(q-1)}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{e/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(q+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(q-e+1)) (e/2)!},$$

$e = 0, 2, \dots, [\frac{1}{2}(q-1)] \times 2$ , である. また critical radius は

$$\theta_c = \frac{\pi}{4}$$

である ( $q$  に依存しない).

定理 4.1 と定理 2.3, 3.2 を併せることにより, 上側裾確率  $P(\lambda_1(A) \geq x)$  の  $x \rightarrow \infty$  での漸近展開, および excursion 集合

$$A_x = \{H \in M_q \mid \text{tr}(AH) \geq x\}$$

の Euler 標数の期待値  $E[\chi(A_x)]$  が直ちに得られる.

ところで写像  $h \mapsto hh'$  は  $S^{q-1}$  上の異なる 2 点  $h, -h$  を  $M_q$  の点  $hh'$  に写す. 添字集合  $M_q$  は  $S^{q-1}$  において  $h$  と  $-h$  とを同一視する空間  $P^{q-1}$  ( $q-1$  次元実射影空間) と同相である. このことから

$$\chi(M_q) = \chi(P^{q-1}) = \begin{cases} 1 & (q-1 \text{ が偶数}) \\ 0 & (q-1 \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である.  $d = q-1$  が偶数の場合は

$$\sum_{e/2=0}^{\frac{1}{2}(q-1)} w_{q-e} = \sum_{e/2=0}^{\frac{1}{2}(q-1)} \frac{2^{\frac{1}{2}(q-1)}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{e/2} \binom{\frac{1}{2}(q-1)}{e/2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \chi(M_q)$$

であり, 確かに系 3.2 が成立している.

最後に  $q = 4, 5$  の場合についての数値例を与える. 図 4.1 の破線は  $4 \times 4$  対称正規分布の excursion 集合の Euler 標数の期待値

$$E[\chi(A_x)] = \sqrt{2}\bar{G}_4(x^2) - \frac{3}{2\sqrt{2}}\bar{G}_2(x^2) \quad (-\infty < x < \infty),$$

実線は最大固有値の正確な上側確率

$$P(\lambda_1(A) \geq x) = 1 - P(\lambda_1(A) < x)$$

である. また図 4.2 の破線は  $5 \times 5$  対称正規分布の excursion 集合の Euler 標数の期待値

$$E[\chi(A_x)] = \begin{cases} 2\bar{G}_5(x^2) - 2\bar{G}_3(x^2) + \frac{1}{2}\bar{G}_1(x^2) & (x \geq 0) \\ 1 - 2\bar{G}_5(x^2) + 2\bar{G}_3(x^2) - \frac{1}{2}\bar{G}_1(x^2) & (x < 0) \end{cases}$$

実線は最大固有値の正確な上側確率である. ただし

$$\begin{aligned} P(\lambda_1(A) < x) &= \Phi(\sqrt{2}x)^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}(2x^2 + 1)\phi(x)\Phi(x)\Phi(\sqrt{2}x) \\ &\quad - \sqrt{2}x\phi(\sqrt{2}x)\Phi(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}x\phi(\sqrt{3}x)\Phi(x) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi(2x) \quad (q = 4) \\ &= \Phi(x)\Phi(\sqrt{2}x)^2 - \frac{4}{3}x^3\phi(x)\Phi(\sqrt{2}x)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{2}}(2x^3 + 9x)\phi(\sqrt{2}x)\Phi(x)\Phi(\sqrt{2}x) \\ &\quad - \frac{1}{6\sqrt{\pi}}(10x^2 + 1)\phi(\sqrt{3}x)\Phi(\sqrt{2}x) \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}(x^2 + 4)\phi(2x)\Phi(x) - \frac{1}{2\pi}x\phi(\sqrt{5}x) \quad (q = 5) \end{aligned}$$

である (Kuriki (1993)).  $\Phi(\cdot)$ ,  $\phi(\cdot)$  は標準正規分布の分布関数, 密度関数である.

これらの例においては tube 法 (Euler 標数法) による裾確率の近似は, 上側確率が 0.3 程度で既に十分に良いことが分かる.

## 参考文献

- [1] Adler, R. J. (1981). *The Geometry of Random Fields*. John-Wiley & Sons, Chichester.
- [2] Adler, R. J. (1998). On excursion sets, tube formulae, and maxima of random fields. *Technical report*, TECHNION.
- [3] Cao, J. and Worsley, K. J. (1998). The geometry of correlation fields, with an application to functional connectivity of the brain. Submitted.
- [4] Johansen, S. and Johnstone, I. (1990). Hotelling's theorem on the volume of tubes: Some illustrations in simultaneous inference and data analysis. *Ann. Statist.*, **18**, 652–684.
- [5] Kuriki, S. (1993). Likelihood ratio tests in multivariate variance components models. Doctoral dissertation, Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo.
- [6] 栗木哲 (1997). 錐を対立仮説とする尤度比検定の分布論. 日本数学会 1997 年度秋季総合分科会統計数学分科会講演アブストラクト, 165–184.
- [7] Kuriki, S. and Takemura, A. (1997). James-Stein type estimator by shrinkage to closed convex set with smooth boundary. *Discussion Paper 97-F-22*, Faculty of Economics, Univ. of Tokyo.
- [8] Kuriki, S. and Takemura, A. (1998). Tail probabilities of the maxima of multilinear forms and their applications. *Discussion Paper CIRJE-F-4*, Faculty of Economics, Univ. of Tokyo.
- [9] Morse, M. and Cairns, S. S. (1969). *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology*. Academic Press, New York.
- [10] Piterbarg, V. I. (1996). *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields*. Translations of Mathematical Monographs, **148**, American Mathematical Society, Providence.
- [11] 佐々木重夫 (1950). Gauss-Bonnet の定理について. *数学*, **2**, 350–368.
- [12] 佐々木重夫 (1977). 微分幾何学 I, II. 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 東京.
- [13] Sun, J. (1993). Tail probabilities of the maxima of Gaussian random fields. *Ann. Probab.*, **21**, 34–71.

- [14] Takemura, A. and Kuriki, S. (1997). Weights of  $\bar{\chi}^2$  distribution for smooth or piecewise smooth cone alternatives. *Ann. Statist.*, **25**, 2368–2387.
- [15] Weyl, H. (1939). On the volume of tubes. *Am. J. Math.*, **61**, 461–472.
- [16] Worsley, K. J. (1995). Boundary corrections for the expected Euler characteristic of excursion sets of random fields, with an application to astrophysics. *Adv. Appl. Probab.*, **27**, 943–959.

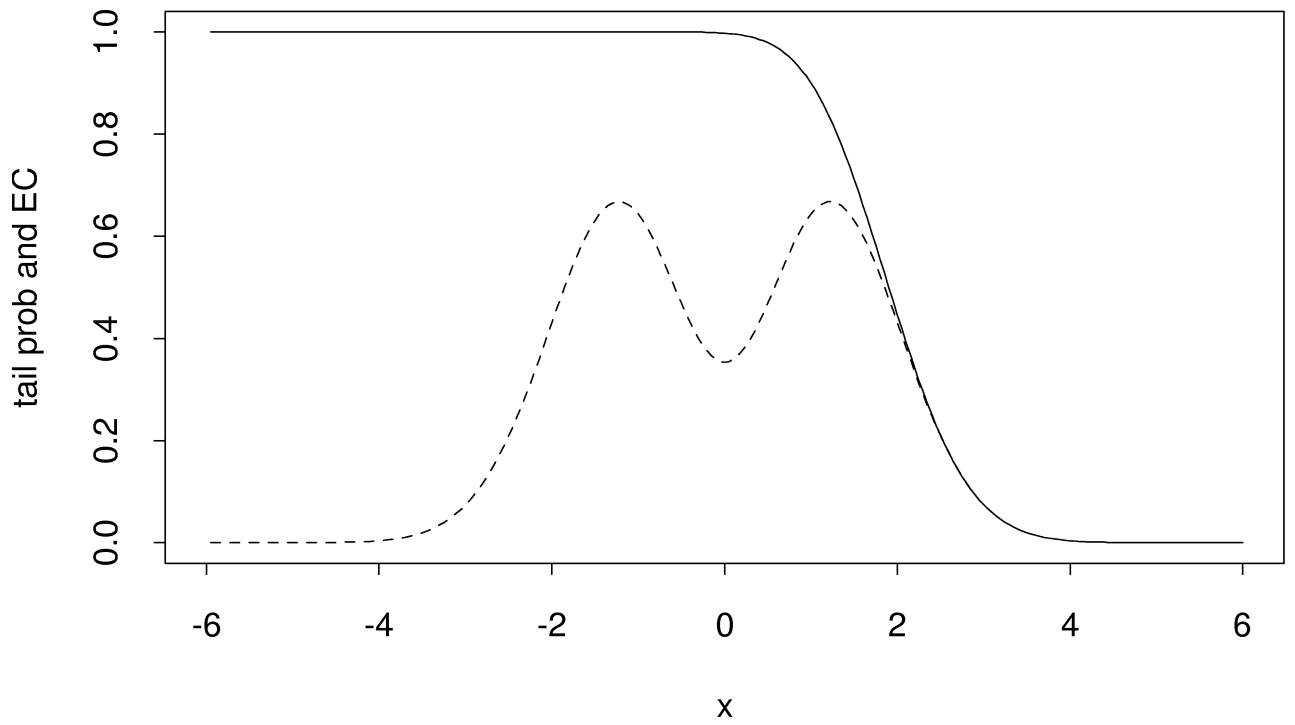


图 4.1  $4 \times 4$  对称正规分布

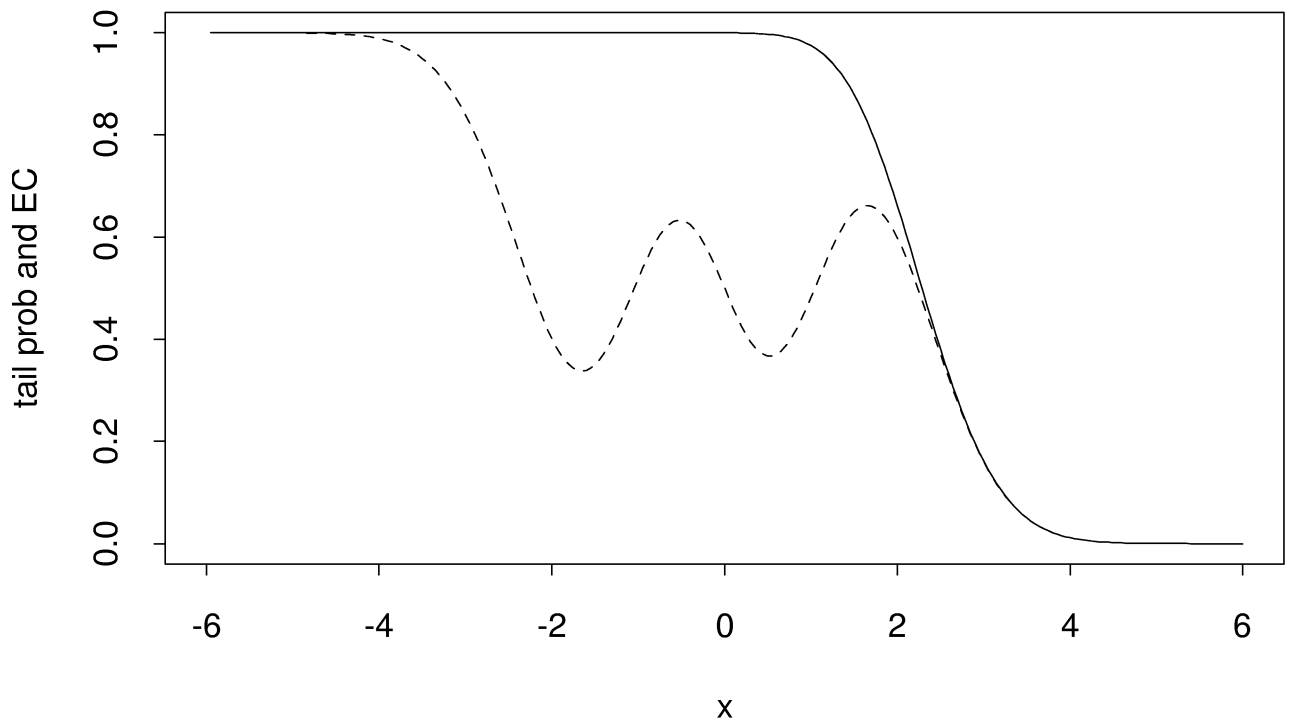


图 4.2  $5 \times 5$  对称正规分布





Datoshi Kunita (The Institute of Statistical Mathematics)  
Akimichi Takemura (Faculty of Economics, University of Tokyo)

November, 1998

### Abstract

Let  $X(t)$ ,  $t \in I$ , be a Gaussian random field with mean 0 and variance 1. Assume that  $X(t)$  has a representation  $X(t) = \sum_{i=1}^p \phi^i(t)z_i$ , where  $z_i$ 's are independent standard normal random variables,  $\phi^i(t)$ 's are smooth functions on  $I$ . Define another random field  $U(t) = \sum_{i=1}^p \phi^i(t)y_i$ , where  $(y_1, \dots, y_p)$  is a unit random vector distributed uniformly on the unit sphere. In this paper we first elucidate the method of tube for approximating the upper tail probabilities of the maxima of these random fields. Second we explain the method of Euler characteristic, which is another method for the same purpose. Moreover, in the cases of random fields  $X(t)$  and  $U(t)$ , the method of Euler characteristic is shown to give the same result as the method of tube. From this fact, a relation between the coefficients of asymptotic expansion of the tail probability and the Euler characteristic of the index set is derived. Finally, as an example we discuss the asymptotic expansion of the largest eigenvalue of the multivariate symmetric normal random matrix.

---

Keywords : Asymptotic expansion, Gauss-Bonnet theorem, integral geometry, Karhunen-Loève expansion, tail probability, tube formula.