

情報統計力学 第5回(改訂版)

2006年 前期
伊庭幸人

根本的な疑問1

物理の基本法則

(ニュートン力学, 量子力学)との関係は？

決定論的なニュートン力学から確率の出てくる
仕組みは一体何か？ なぜ十分統計量が
保存量になるのか？ その条件は？

なぜ基準となる測度は $\prod_i dx_i dp_i$ か？

やさしい部分

ニュートンの運動法則のもとで一様密度

$$\prod_i dx_i \prod_i dp_i$$

が不変密度になる

(解析力学の)リウビルの定理

難しい部分

どういう条件のもとで

不変密度が一意性をもつか

(i.e. 任意の初期条件から実現されるか)

エルゴード問題

- ・反例はいくらでもある
- ・簡便な「判定法」「十分条件」が欲しいが、ほぼ無理？
- ・「一意的」でなくてもよいかも「等価なものが多数」等？

具体例で考えてみる

@無理数回転 (ワイルの定理 $\Rightarrow$ エルゴード性)

$$\theta_{t+1} = \theta_t + c \pmod{1}$$

c が無理数だと円周の上を埋め尽くしてゆく

連続時間と離散時間(マップ)の関係

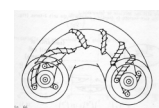
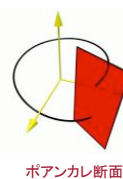
注目している座標のほかにもう一組あり

周期 T で振動 または 周期 T の外力

$\rightarrow T$ ごとに点をプロットすると離散時間になる

(ストロボマップ)

$$\exp(2\pi i w_1 t) + \exp(2\pi i w_2 t)$$



無理数回転

すべての点を通るわけではない

証明 1) $nC + m = A$: n, m が自然数
 C が無理数で A が有理数ありえない

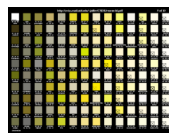
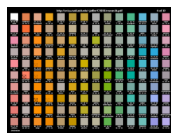
証明 2) 点列は可算無限 実数は非可算

おまけ: ニュートンの運動方程式では?

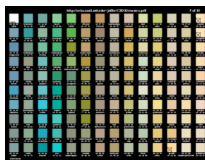
- @ 不連続でよいなら $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は 1 対 1 対応
- @ 重複点があってもよいなら連続曲線で $\mathbb{R}^2$ を埋め尽くせる (space filling curve)

- 連続で 1 対 1 なら無理
 やはりすべての点を通ることはない
- ポアンカレの帰帰定理 ← リウビルの定理
 任意の点の近傍に、自分のいくらでも
 近くに帰帰する点がある

さらにおまけ: space filling curve の応用



普通に辞書式など



カラーチャート (3次元)
 を満たす曲線を利用

無理数回転のエルゴード性の別証明

- 稠密性 クロネッカーの定理 (ヤコビの定理)
 円周はコンパクト集合 $\Rightarrow$ 無限個の点は **集積点**

$$\forall \epsilon, \exists \epsilon' (< \epsilon), n, m, \theta_m - \theta_n = \epsilon'$$

$$|n - m| \text{ 回の写像ごとに点を選ぶ}$$

- 任意に短い区間の像で円周が覆われる
- **Vitari の被覆定理 (またはルベグの密度定理)**

↑ ルベグ測度論

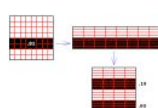
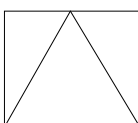
混合性と折りたたみ

@ Anosov 写像 (アーノルドの猫)

$$x_{t+1} = x_t + y_t \pmod{1}$$

$$y_{t+1} = x_t + 2y_t \pmod{1}$$

@ Baker's map (パイこね変換)



これからどちらに?

- より高度な簡単な例を数学的に厳密に
 伸ばし方向 + 縮む方向 分解できる

- より現実的な例を数値実験で

- ◎ 低次元 $\rightarrow$ 保存系のカオスの研究
- ◎ 高次元保存系の研究

■ より高度な簡単な例を数学的に厳密に

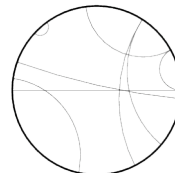
伸ばし方向 + 縮む方向 分解できる

精緻な数学的結果の探求(1)

ポアンカレ上半平面

負曲率でコンパクトな多様体

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$



精緻な数学的結果の探求(2)

シナイのビリヤード

凸面鏡

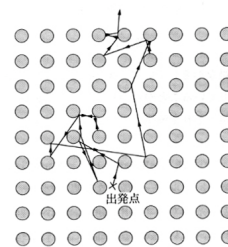
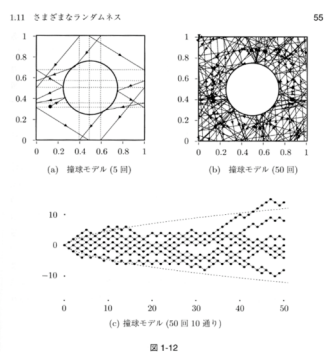


図 1-13 ローレンツ気体の分子の軌跡

■ より現実的な例を数値実験で

◎ 低次元 → 保存系のカオスの研究

標準写像

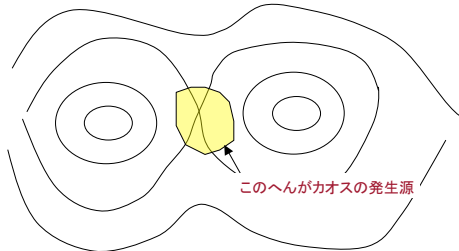
$$p_{n+1} = p_n + K \sin(2\pi x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_n$$

保存系のカオスの研究のシンボル

振り子+αのカオスの起源

振り子のおもりにネズミが入っていて
貧乏ゆすりをするでしょう



- より現実的な例を数値実験で
- ◎ 高次元保存系の研究

Fermi-Pasta-Ulam実験

電子計算機の黎明時代にロスアラモスで

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \alpha[(x_{n+1} - x_n)^2 - (x_n - x_{n-1})^2]$$

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \beta[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3]$$

予想外の結果 ⇒ エルゴード仮説を否定？

- 実はすぐそばに未知の「解ける系」が存在
- エネルギー、経過時間などに閾値

その後・・・

カオス⇒ 全体が混合するわけでない
局所カオスと大域カオスがあるらしい

長距離(ベキや一様結合)では極端に
遅い混合 統計力学不成立もありうる？

その他の重要な論点

◎観測量による違い

すべての測定についてミクロカノニカル
の値を返す必要はないかもしれない
⇒ (準)エルゴード仮説は強すぎる？

◎ 量子系

量子系とパイコね変換のようなものは
相性がきわめて悪い。

最近の研究の例(1)

- 2006年6月5日(月) 15:00～ 理学部1号館241

SPEAKER: Stefano Ruffo 【Universita di Firenze】

TITLE: Slow dynamics in systems with long-range interactions

ABSTRACT: I will review several non-equilibrium dynamical effects characteristic of systems with long-range interactions. In particular, the intriguing formation of quasi-stationary states, which evolve to equilibrium slower and slower as system size increases. In this respect, I will discuss several models which show such features, beginning with simple mean-field models of the Ising or the XY type.

最近の研究の例(2)

- 第4回 2006年5月31日(水) 13:00-15:00

発表者
杉田 歩 氏(大阪市立大)

題目(title)
量子統計力学の基礎付けについて

概要(abstract)

マクロな孤立有限量子系において、ミクロカノニカル平均の使用をどうやって正当化するか、という問題を考える。
まず、基本となるのは、我々はマクロな系において全ての物理量をチェックすることはできず、非常に粗くしか系を見ることが出来ない、また、そのような状況においては、ほとんど全ての状態は同じに見える、ということである。このトークでは、実際に意味のある物理量(例えばマクロ変数)は、比較的少数の局所的物理量の積及びそれらの和、という形に書けることに注目し、これらの物理量だけを見る限り、圧倒的大多数の状態はミクロカノニカル平均と区別がつかないことを、簡単かつ厳密な不等式によって示す。また、平衡状態を形成する上で、エルゴード性等のダイナミクスに関する強い仮定が不要であること、エンタングルメントが本質的な役割を担っていること等を議論したい

ここまでで何がいえるか

- 洗濯ものが乾くのは？
- 放射性物質が崩壊するのは？
- 地球の大気に水素がないわけ

脱出速度
$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0$$