

情報統計力学 第4回(改訂版)

2006年 前期
伊庭幸人

根本的な疑問1

物理の基本法則

(ニュートン力学, 量子力学)との関係は?

決定論的なニュートン力学から確率の出てくる
仕組みは一体何か? なぜ十分統計量が
保存量になるのか? その条件は?

なぜ基準となる測度は $\prod_i dx_i dp_i$ か?

やさしい部分

ニュートンの運動法則のもとで一様密度

$$\prod_i dx_i \prod_i dp_i$$

が不変密度になる

(解析力学の)リウビルの定理

難しい部分

どういう条件のもとで

不変密度が一意性をもつか

(i.e. 任意の初期条件から実現されるか)

エルゴード問題

- ・反例はいくらでもある
- ・簡便な「判定法」「十分条件」が欲しいが、ほぼ無理?
- ・「一意的」でなくてもよいかも「等価なものが多数」等?

エルゴード定理のまとめ

@いろいろな「概収束」定理の親玉的存在

@改良版の証明は僅か2ページなのに謎

仮定:「不変集合が空集合と全体」

もとの問題が解けているとはいえない

具体例で考えてみる

@無理数回転 (ワイルの定理 $\Rightarrow$ エルゴード性)

$$\theta_{t+1} = \theta_t + c \pmod{1}$$

c が無理数だと円周の上を埋め尽くしてゆく

@Anosov写像 (アーノルドの猫)

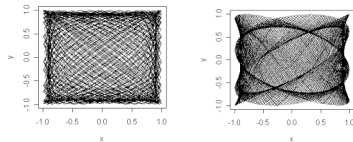
$$x_{t+1} = x_t + y_t \pmod{1}$$

$$y_{t+1} = x_t + 2y_t \pmod{1}$$

無理数回転(ワイルのビリヤード)

リサージュ図形

$$\exp(iw_1t) + \exp(iw_2t)$$



$$\exp(2\pi i w_1 t) + \exp(2\pi i w_2 t)$$

$$t = k/w_1$$

$$1 + \exp(2\pi i k(w_2 - w_1)/w_1)$$

$$w = (w_2 - w_1)/w_1$$

$$\exp(2\pi i w k)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega \pmod{1}$$

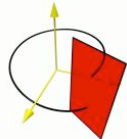
↑ 無理数

連続時間と離散時間(マップ)の関係

注目している座標のほかにもう一組あり

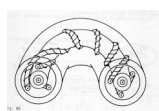
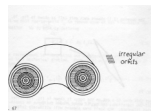
周期Tで振動 または 周期Tの外力

→ Tごとに点をプロットすると離散時間になる



ポアンカレ断面

(ストロボマップ)



無理数回転のエルゴード性の証明

円周上の任意の関数をフーリエ展開

$$a_k \exp(2\pi i k \theta)$$

$$a_k \exp(2\pi i k \omega) \exp(2\pi i k \theta)$$

$$a_k = 0 \quad k \neq 0$$

区間の特性関数 ⇒ 三角多項式近似

可測集合の特性関数 ⇒ 二乗可積分関数の空間でのフーリエ展開

↑ ルベーグ測度論

無理数回転のエルゴード性の別証明

■稠密性 クロネッカーの定理(ヤコビの定理)

円周はコンパクト集合 ⇒ 無限個の点は集積点

$$\forall \epsilon, \exists \epsilon' (< \epsilon), n, m, \theta_m - \theta_n = \epsilon'$$

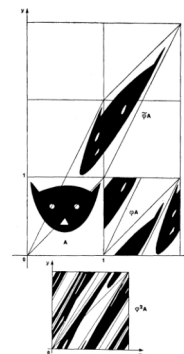
$$|n - m| \text{ 回の写像ごとに点を選ぶ}$$

■任意に短い区間の像で円周が覆われる

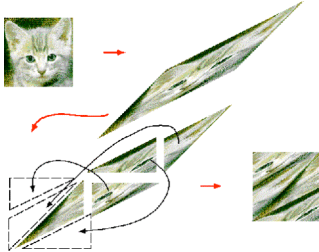
■Vitaliの被覆定理 (またはルベーグの密度定理)

↑ ルベーグ測度論

アーノルドの猫(オリジナル)



アーノルドの猫(写真版)



混合性

無理数回転の場合, ε だけずれているといつまでも ε のずれ

猫の場合, ε のずれはどんどん拡大する

⇒ エルゴード的だからといって積極的に混ざり合うとは限らない

混合性(数学的な定義)

任意の可測集合 A, B に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\varphi_t(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

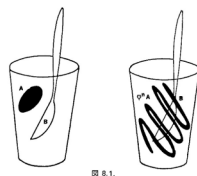


図 8.1.

アーノルド／ワイル



混合性は必要か？

リサージュでも積分はできる！

HASELGROVE'S METHOD による数値積分
(超一様分布列, 準乱数の一種)

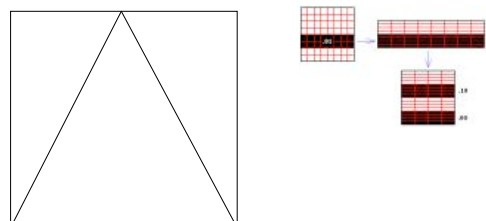
平衡統計力学に混合性がどの程度必要かは議論がある

(ただし, 高次元リサージュそのものはエネルギーがそれぞれで保存されて分配されないで×)

拡散, 熱伝導など非平衡の現象には必須と思われる

混合性の基本機構

Baker's map (パイこね変換)



ビット空間での流れ

下位ビット ⇒ 上位ビット

$\dots, 0, 1, 0, 1, 1, 0 \dots$
 $\dots, 0, 1, 0, 1, 1, 0 \dots$
 $\dots, 0, 1, 0, 1, 1, 0 \dots$

→

「情報の生成」「エントロピーの生成」

正規数

「ほとんどすべての2進数は0と1の数が同じ」
 ほとんどすべて・普通の直線の測度(長さ)

「ほとんどすべての10進数は・・・」同様

123456789101112131415・・・

パイコね変換, テント写像は読み出し装置

おまけ

連分数

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

連分数マップ

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \left[\frac{1}{x_n} \right]$$

シミュレーション

