情報統計力学
第3回(改訂版)

2006年　前期

伊庭幸人

根本的な疑問1

物理の基本法則

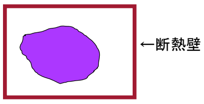
（ニュートン力学，量子力学）との関係は？

決定論的なニュートン力学から確率の出てくる仕組みは一体何か？　なぜ十分統計量が保存量になるのか？　その条件は？

なぜ基準となる測度は $\prod_i dx_i\, dp_i$ か？

等確率の原理

今回～次回は疑問1のほうを考える



外部とエネルギーの出入りのない系が
じゅうぶん複雑なら，
観察する時間が無限大の極限で

与えられたエネルギーの
状態はすべて等確率で出現する

やさしい部分

ニュートンの運動法則のもとで一様密度

$$\prod_i dx_i \prod_i dp_i$$

が不変密度になる

（解析力学の）リウビルの定理

補足1　シンプレクティック変換

前回

ハミルトン方程式による時間発展　保測

ハミルトン方程式の形を変えない　シンプレクティック

シンプレクティック　⇒　保測

逆は必ずしもいえない

実は

ハミルトン方程式による時間発展はシンプレクティック

完結した美しい世界

いろんなハミルトン方程式があって，
方程式Aによる時間発展を座標変換とみなすと
方程式Bはそれによって不変
それらのうちひとつが「物理的な時間発展」
そのほかが座標変換に対応する

さらに多様体上で定式化

⇒　「シンプレクティック多様体」の数学

解析力学（数学系）

@アーノルド「古典力学の数学的方法」（岩波）
日本語は品切れ.
Mathematical Methods of Classical Mechanics

@伊藤 秀一「常微分方程式と解析力学」
共立講座 21世紀の数学

@深谷賢二「解析力学と微分形式 」
岩波講座　現代数学への入門

リストマニア！@アマゾン
解析力学

補足2　量子論の場合

$$p(i \to j) = |A_{ij}|^2$$

$$A_{ij} = {}^*A_{ji} \quad \Rightarrow \quad p_{ij} = p_{ji}$$

∴ 遷移のグラフが強連結で
確率が1でも0でもなければ
一様分布が不変分布

うそ！

確率振幅と干渉

× $p(i \to k) = \sum_j p(i \to j)p(j \to k)$

○ $A(i \to k) = \sum_j A(i \to j)A(j \to k)$

$$\left| \sum_j A(i \to j)A(j \to k) \right|^2$$

非対角項
（量子干渉）

難しい部分：　今日のテーマ

どういう条件のもとで
不変密度が一意性をもつか
（i.e. 任意の初期条件から実現されるか）

エルゴード問題

- 反例はいくらでもある
- 簡便な「判定法」「十分条件」が欲しいが，ほぼ無理？
- 「一意的」でなくてもよいかも 「等価なものが多数」等？

バーコフのエルゴード定理

（Birkhoff　1932）

@　エルゴード問題を解決したわけではない

@　「エルゴード性」から何がいえるかを
厳密に示すのに役立つ　（時間は離散化）

不変密度が一意に決まる場合

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} f(\varphi_t(\alpha)) = \text{const.} \quad \text{a.s. w.r.t. } \mu$$

$$\text{const.} = \int_\Omega f(\alpha)\, d\mu$$

時間平均　＝　空間平均

？？当たり前？？　⇒上の式が「収束する」のがポイント

一般の場合

$$\exists f^* \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(\varphi_t(\alpha)) = f^*(\alpha) \quad \text{a.s. w.r.t. } \mu$$

$$f^*(\alpha) = \text{const.} \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{D}$$

$\mathcal{D}$ 不変集合の作るσ代数 $\mathfrak{J}$の元（集合）

$$\int_{\mathcal{D}} f^*(\alpha)\, d\mu = \int_{\mathcal{D}} f(\alpha)\, d\mu$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum f(\varphi_t(\alpha)) \to \mathbb{E}(f(\alpha)|\mathfrak{J}) \quad \text{a.s. w.r.t. } \mu$$

おまけ1（その1：訂正版）

（むしろ）確率的な系の研究に役立つ

【考え方が面白い】　定常時系列の同時分布を考える

$$P(\cdots, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, X_3, \cdots)$$

$$\cdots, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \cdots$$

$$\cdots, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \cdots$$

対応：「無限列全体」を α 「ずらす操作」を φ_t

たとえば「大数の強法則」がこの方法で示せる　↑これ自体は非確率的

仮定が必要

系列のエルゴード性

⇔ 1つシフトする写像の不変集合が
　空集合φと全体の2つしかない

独立事象の場合

定常なら：不変集合に属する ⇒ 末尾事象
(はじめの有限個によらない)
「コルモゴルフの01法則」が適用できる

おまけ（その2）

subaddtive ergodic theorem　劣加算的

「算術平均」を超える試み

$$S_n(\alpha) = \sum_{t=0}^{n} f(\varphi_t(\alpha))$$ とすると

$$S_{n+m}(\alpha) = S_n(\alpha) + S_m(\varphi_n(\alpha))$$

$$A_{n+m}(\alpha) \leq A_n(\alpha) + A_m(\varphi_n(\alpha))$$

↑凸性

↓行列の積

$$A_n(X) = \log ||\cdots X(\varphi_2(\alpha))\, X(\varphi_1(\alpha))\, X(\alpha)||$$

エルゴード定理のまとめ

@いろいろな「概収束」定理の親玉的存在
@改良版の証明は僅か2ページなのに謎
@バーコフは超頭脳だ

もとの問題，全然解けてないと
思うんですけど

バーコフ