

レポート用問題 (2010年度東京工業大学)

カーネル法：正定値カーネルによるデータ解析
「ORの理論第二」(8学期)、「数理・計算科学特論第五」(大学院)

講師：福水健次

fukumizu@ism.ac.jp

提出期限： 2011年1月19日(水)

次の各問に答えよ。

1. \mathcal{X} を集合、 (T, \mathcal{B}, μ) を測度空間とする。 $T \times \mathcal{X}$ 上の複素数値関数 $H(t, x)$ が、任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して $H(\cdot, x) \in L^2(T, \mu)$ を満たすと仮定する。このとき

$$k(x, y) = \int_T H(t, x) \overline{H(t, y)} d\mu(t)$$

で定義される \mathcal{X} 上のカーネルが正定値であることを証明せよ。

2. 次の各カーネルは正定値か？ 理由をつけて答えよ。

(a) $\cos(x - y)$ on \mathbb{R} .

(b) $\cos(x + y)$ on \mathbb{R} .

(c) $\frac{1}{x+y}$ on $(0, \infty)$.

(d) $\min(x, y)$ on $[0, \infty)$. [ヒント：問1を用いよ]

3. SVMの主問題が

$$\begin{aligned} \min_{w_i, b, \xi_i} & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w_i w_j k(X_i, X_j) + C \sum_{i=1}^N \xi_i, \\ \text{subject to} & \begin{cases} Y_i (\sum_{j=1}^N k(X_i, X_j) w_j + b) \geq 1 - \xi_i, \\ \xi_i \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

であることを用いて、双対問題が以下のようになることを示せ。

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j Y_i Y_j k(X_i, X_j) \quad \text{subject to} \begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C, \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i Y_i = 0 \end{cases}$$