カーネル法入門
3. カーネル法の数理的基礎

福水健次

統計数理研究所／総合研究大学院大学

大阪大学大学院基礎工学研究科・集中講義
2014 September

カーネル法で用いられる，正定値カーネルに関する基礎的性質を述べる

- 正定値性を保つ操作
- Bochnerの定理
- RKHSの陽な形
- 負定値カーネル
- Mercerの定理

正定値性を保つ操作

複素数値の正定値カーネル

定義.

Ω: 集合. $k\colon \Omega\times\Omega\to\mathbf{C}$ が正定値であるとは，任意の個数の点 $x_1,\dots,x_n\in\Omega$ と複素数 $c_1,\dots,c_n\in\mathbf{C}$ に対し，

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\,k(x_i,x_j)\ge 0.$$

が成り立つことをいう.

注意： 上の定義から，Gram行列 $\left(k(x_i,x_j)\right)_{ij}$ はHermitianになる, i.e.

$k(y,x)=\overline{k(x,y)}$. ［演習問題：これを示せ］

正定値性を保つ変換

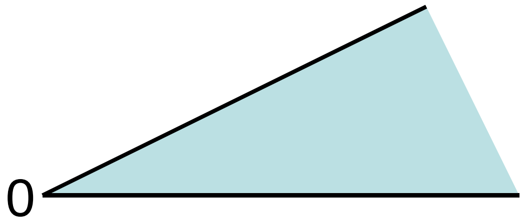
命題4.1

$k_i : \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}\ (i = 1,2, \dots ,)$ を正定値カーネルとするとき，以下はまた正定値カーネルである:

1. (非負結合) $ak_1 + bk_2$ $(a, b \geq 0)$.
2. (積) $k_1 k_2$ $\big(k_1(x,y)k_2(x,y)\big)$
3. (極限) $\lim_{i\to\infty} k_i(x,y)$, （極限の存在は仮定）.

1，3 は定義から明らか．2を示すには，2つの半正定値行列のHadamard積（要素ごとの積）がまた半正定値であることを言えばよい．

Ω 上の正定値カーネル全体は，各点収束の位相によって，閉凸錐を成す



<u>命題4.2</u>

A と B が半正定値Hermite行列であるとき，それらHadamard積 $K = A * B$ (要素ごとの積)は半正定値である.

Proof)

Aの固有展開: $A = U\Lambda\overline{U}^T = \left(U_p^i\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots \\ \vdots & \ddots \vdots \\ 0 \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\overline{\left(U_p^j\right)}^T$

i.e.,

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p U_p^i \overline{U_p^j} \quad （半正定値性より\lambda_p \geqq 0）.$$

すると,

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} K_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \lambda_p U_p^i \overline{U_p^j} B_{ij}$$

$$= \lambda_1 \left(\sum_{i,j=1}^{n} c_i U_1^i \overline{c_j U_1^j} B_{ij} \right) + \Lambda + \lambda_n \left(\sum_{i,j=1}^{n} c_i U_n^i \overline{c_j U_n^j} B_{ij} \right) \geq 0.$$

■

カーネルの正規化

<u>命題4.3</u>

k を集合Ω上の正定値カーネル, $f:\Omega\to\mathbf{C}$ を任意の関数とするとき,

$$\tilde{k}(x,y) \;:=\; f(x)k(x,y)\overline{f(y)}$$

は正定値カーネルである. 特に,

$$f(x)\overline{f(y)}$$

正定値カーネルである.

– Proof [演習問題]

– 例）正規化: 任意の正定値カーネル $k(x,y)$ に対し,

$$\tilde{k}(x,y)=\frac{k(x,y)}{\sqrt{k(x,x)k(y,y)}}$$

は正定値. 任意の $x\in\Omega$ に対し $\|\tilde{\Phi}(x)\|=1$ が成立（$\tilde{\Phi}(x):=\tilde{k}(\cdot,x)$）.

さまざまなカーネルの正定値性

– Euclid内積 $x^T y$:（すでに見た. 命題1．1）.

– 多項式カーネル $(x^T y + c)^d$ ($c \geq 0$):

$$(x^T y + c)^d = (x^T y)^d + a_1 (x^T y)^{d-1} + \cdots + a_d, \quad a_i \geq 0.$$

正定値カーネルの冪（積）とそれらの非負結合.

– ガウスRBFカーネル $\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}\right)$:

$$\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}\right) = e^{-\|x\|^2/\sigma^2} e^{x^T y/\sigma^2}\, e^{-\|y\|^2/\sigma^2}$$

$$e^{x^T y/\sigma^2} = 1 + \frac{1}{1!\,\sigma^2}(x^T y) + \frac{1}{2!\,\sigma^4}(x^T y)^2 + \cdots$$

は正定値(命題. 4.1). 命題4．3よりガウスカーネルは正定値.

– Laplaceカーネルは, Bochnerの定理を使う.（後述）.

Bochnerの定理

平行移動不変なカーネル

- $\mathbf{R}^m$ 上の正定値カーネル $k(x, y)$ が平行移動不変であるとは，カーネルが $k(x, y) = \psi(x - y)$ の形を持つことをいう.

- 例: GaussRBFカーネル, Laplaceカーネル

- $\mathbf{R}^m$上のFourier カーネル（$\mathbf{C}$-値正定値): 各$\omega \in \mathbf{R}^m$に対し,

$$k_F(x, y) = \exp\left(\sqrt{-1}\omega^T(x - y)\right) = \exp\left(\sqrt{-1}\omega^T x\right)\overline{\exp\left(\sqrt{-1}\omega^T y\right)}$$

(Prop. 4.3)

- $k(x, y) = \psi(x - y)$ が正定値カーネルである時，ψ を正定値関数という.

Bochnerの定理

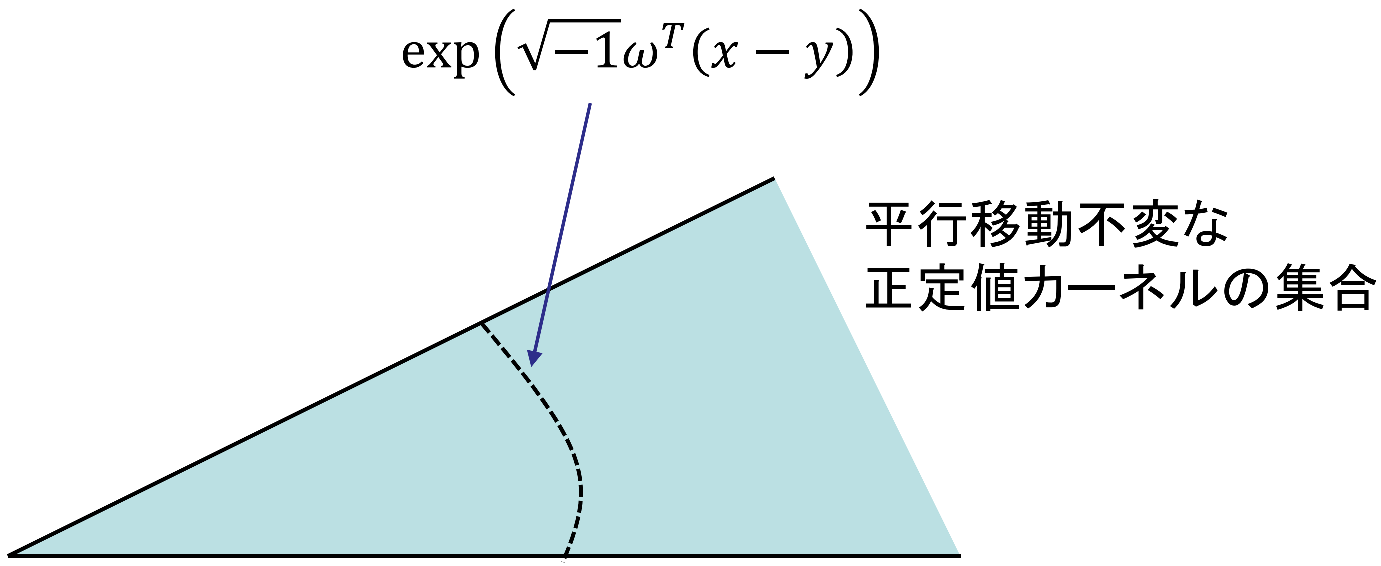
定理4.4 (Bochner)

ψ を $\mathbf{R}^m$ 上の連続関数とする時，ψ ($\mathbf{C}$-値)正定値関数であることと，$\mathbf{R}^m$上の有限非負Borel測度 Λ が存在して

$$\psi(z) = \int \exp\left(\sqrt{-1}\omega^T z\right) d\Lambda(\omega)$$

と書けることは同値である．このとき Λ は一意に決まる．

- Λ は ψ のFourier (Fourier-Stieltjes) 変換.
- 連続な正定値関数は，非負のFourier変換を持つことで特徴づけられる.
- Bochnerの定理より，$\left\{\exp\left(\sqrt{-1}\omega^T z\right) \middle| \omega \in \mathbf{R}^m\right\}$ は，平行移動不変な連続正定値カーネルのなす錐の生成集合．(命題4.1参照).
- 十分性は容易: $\sum_{i,j} c_i \overline{c_j}\, \psi\left(z_i - z_j\right) = \int |\sum_i c_i e^{\sqrt{-1}\omega^T z_i}|^2 d\Lambda(\omega)$.
  必要性は難しい（参考：伊藤1963 §30）.


$\exp\left(\sqrt{-1}\omega^T(x-y)\right)$
平行移動不変な
正定値カーネルの集合

周波数領域でみたRKHS

平行移動不変なカーネル k が以下の形を持つと仮定する(c.f. Bochner)

$$k(x,y) = \int \exp\left(\sqrt{-1}\omega^T(x-y)\right)\rho(\omega)d\omega\,.$$

ρは連続，$\rho(\omega) > 0, \int \rho(\omega)d\omega < \infty$

するとRKHS H_k は

$$H_k = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R}, dx) \,\middle|\, \int \frac{\left|\hat{f}(\omega)\right|^2}{\rho(\omega)} d\omega < \infty \right\},$$

$$\langle f, g\rangle = \int \frac{\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}}{\rho(\omega)} d\omega$$

ただし $\hat{f}$ は f のFourier変換 $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int f(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}\omega^T x}\, d\omega\,.$

– このときRKHSノルム $\|f\|_H$ は f の滑らかさ（周波数特性）と関連する.

[証明]　再生性のみ確認する．詳しい証明は福水（命題2．19）

$k_x(y) \coloneqq k(y,x)$とおく．k の定義より

$$k_x(y) = \int e^{\sqrt{-1}\,(y-x)^T\omega}\rho(\omega)d\omega$$
$$= \int e^{\sqrt{-1}y^T\omega} e^{-\sqrt{-1}x^T\omega}\rho(\omega)d\omega$$

であるから，k_x は $e^{-\sqrt{-1}x^T\omega}\rho(\omega)$ のFourier逆変換．すると，k_x の Fourier変換 $\widehat{k_x}$ は，

$$\widehat{k_x}(\omega) = e^{-\sqrt{-1}x^T\omega}\rho(\omega)$$

で与えられる．

内積の定義により

$$\langle f, k_x \rangle = \int \frac{\hat{f}(\omega)\overline{\widehat{k_x}(\omega)}}{\rho(\omega)}d\omega \;=\int \hat{f}(\omega)e^{\sqrt{-1}x^T\omega}d\omega = f(x)$$

[Fourier逆変換]

■ GaussRBFカーネル

$$k_G(x,y) = \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad \rho_G(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^m}\exp\left(-\frac{\sigma^2\|\omega\|^2}{2}\right)$$

$$H_{k_G} = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R}, dx) \;\middle|\; \int \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \exp\left(\frac{\sigma^2\|\omega\|^2}{2}\right) d\omega < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = (2\pi)^m \int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} \exp\left(\frac{\sigma^2\|\omega\|^2}{2}\right) d\omega$$

■ Laplace カーネル($\mathbf{R}$上)

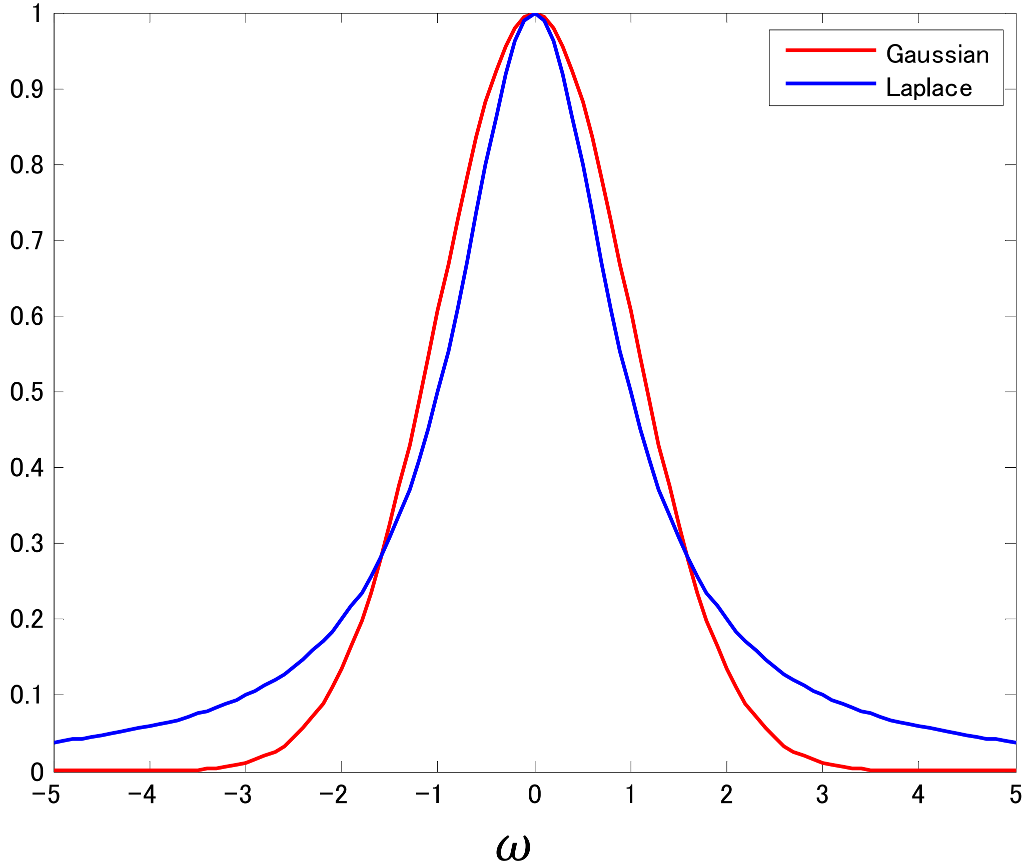
$$k_L(x,y) = \exp(-\beta|x-y|), \qquad \rho_L(\omega) = \frac{1}{2\pi(\omega^2+\beta^2)}$$

$$H_{k_L} = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R}, dx) \;\middle|\; \int \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 (\omega^2+\beta^2) d\omega < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = 2\pi \int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} (\omega^2+\beta^2) d\omega$$

– $f \in H$ の高周波成分は，GaussカーネルとLaplaceカーネルで大きく異なる.

周波数特性



多項式カーネルのRKHS

– Polynomial kernel on $\mathbf{R}$:

$$k_p(x,y) = (x^T y + c)^d, \qquad (c \geq 0, d \in \mathbf{N})$$

$$k_p(x, z_0) = z_0^d x^d + \binom{d}{1} c z_0^{d-1} x^{d-1} + \binom{d}{2} c^2 z_0^{d-2} x^{d-1} + \cdots + c^d.$$

<u>命題4.5</u>

$c > 0$ のとき，d次の多項式カーネル定めるRKHSは d 次以下の多項式全体のなす空間と，ベクトル空間として一致する.

[Proof: 演習問題．ヒント. $\sum_{i=0}^{d} b_i k(x, z_i) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ を満たす b_i は線形方程式の解として与えられる.]

和空間，積空間

$(H_1, k_1), (H_2, k_2)$: 集合 Ω 上の正定値カーネル k_i と対応するRKHS.

■ 和空間

RKHS for $k_1 + k_2$:

$$H_1 + H_2 = \{f: \Omega \to R \mid \exists f_1 \in H_1, \exists f_2 \in H_2, f = f_1 + f_2\}$$

$$\|f\|^2 = \min\{\|f_1\|_{H_1}^2 + \|f_2\|_{H_2}^2 \mid f = f_1 + f_2, f_1 \in H_1, f_2 \in H_2\}.$$

■ 積空間

RKHS for $k_1 k_2$:

$H_1 \otimes H_2 =$ ベクトル空間としてのテンソル積.

$\{f = \sum_{i=1}^n f_i g_i \mid f_i \in H_1, g_i \in H_2\}$ は$H_1 \otimes H_2$の元.

$$\langle \sum_{i=1}^n f_i^{(1)} g_i^{(1)}, \sum_{j=1}^m f_j^{(2)} g_j^{(2)} \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle f_i^{(1)}, f_j^{(2)} \rangle_{H_1} \langle g_i^{(1)}, g_j^{(2)} \rangle_{H_2}.$$

負定値カーネルと正定値カーネル

負定値カーネル

<u>定義</u>　カーネル $\psi: \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}$ が負定値であるとは，ψ がHermitian すなわち $\psi(y,x) = \overline{\psi(x,y)}$であり，かつ任意の個数の点 $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ と $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$ を満たす $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{C}$ に対し，

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \psi(x_i, x_j) \le 0$$

を満たすことをいう.

注１：　ー（マイナス）負定値カーネル ＝ 正定値カーネル　ではない！

注２：　正定値カーネル k に対し，$-k$ は負定値カーネル.

命題4.5

定数関数は負定値カーネルである.

[演習問題]　これを証明せよ.

命題4.6

$\psi_i \ (i = 1,2,\ldots)$が負定値カーネルであるとき，次も負定値カーネル.

(1)　[非負結合]　$a_1\psi_1 + a_2\psi_2$　（$a_1, a_2 \geq 0$）

(2)　[極限]　$\lim_{i\to\infty} \psi_i(x, y)$　（極限の存在は仮定）

（証明は正定値の場合と同様）

負定値カーネルの例

定理4.7

V を内積を持つベクトル空間, $\phi: \Omega \to V$ を任意の写像とするとき,

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|^2$$

は負定値カーネルである.

[証明]

$\sum_{i=1}^n c_i = 0$ をとる.

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \|\phi(x_i) - \phi(x_j)\|^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \left\{\|\phi(x_i)\|^2 + \|\phi(x_j)\|^2 - \left(\phi(x_i), \phi(x_j)\right) - \left(\phi(x_j), \phi(x_i)\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i |\phi(x_i)|^2 \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n c_j |\phi(x_j)|^2$$

$$- \left(\sum_i c_i \phi(x_i), \sum_j c_j \phi(x_j)\right) - \left(\sum_j \overline{c_j} \phi(x_j), \sum_i \overline{c_i} \phi(x_i)\right)$$

$$= -\|\sum_{i=1}^n c_i \phi(x_i)\|^2 - \|\sum_{i=1}^n \overline{c_i} \phi(x_i)\|^2 \le 0.$$

正定値カーネルと負定値カーネル

補題4.8

$\psi: \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}$をHermitianカーネルとする．任意の点$x_0 \in \Omega$を固定し，

$\varphi(x,y) \coloneqq -\psi(x,y) + \psi(x,x_0) + \psi(x_0,y) - \psi(x_0,x_0)$

と定める．このとき，ψ が負定値であることと φ が正定値であることは同値である．

[証明] $\Leftarrow$ は容易（演習）.

$\Longrightarrow$） $x_1, \dots, x_n \in \Omega$, $c_1, \dots, c_n$を任意に取り，$c_0 \coloneqq \sum_{i=1}^n c_i$ とおく．ψ が負定値であることから，$x_0, x_1, \dots, x_n$ と $c_0, c_1, \dots, c_n$（$\sum_{i=0}^n c_i = 0$）に対し，

$0 \geq \sum_{i,j=0}^n c_i \overline{c_j}\, \psi\left(x_i, x_j\right)$

$= \sum_{i=1}^n c_i \overline{c_j} \psi(x_i, x_j) + \overline{c_0} \sum_{i=1}^n c_i \psi(x_i, x_0) + c_0 \sum_{j=1}^n \overline{c_j} \psi(x_0, x_j) + |c_0|^2 \psi(x_0, x_0)$

$= \sum_{i.j=1}^n c_i \overline{c_j} \{\psi(x_i, x_j) - \psi(x_i, x_0) - \psi\left(x_0, x_j\right) + \psi(x_0, x_0)\}$

$= -\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \varphi(x_i, x_j)$

Schoenbergの定理

定理4.9（Schoenbergの定理） Ωを空でない集合とし，$\psi: \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}$ をカーネルとする．このとき，

$$\psi \text{ が負定値} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{任意の } t > 0 \text{ に対して } \exp(-t\psi) \text{ が正定値.}$$

[証明]

$\Longleftarrow$）

$$\psi(x, y) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - \exp\left(-t\psi(x,y)\right)}{t}$$ （微分）より容易にわかる．

$\Longrightarrow$） $t = 1$ について示せば十分． 補題4.8より

$$\varphi(x, y) = -\psi(x, y) + \psi(x, x_0) + \psi(x_0, y) - \psi(x_0, x_0)$$

は正定値．Taylor展開を考えれば $\exp(\varphi(x, y))$ も正定値．すると

$$e^{-\psi(x,y)} = e^{\varphi(x,y)} e^{-\psi(x,x_0)} e^{-\psi(x_0,y)} e^{\psi(x_0,x_0)}$$

は正定値．

負定値カーネルの生成

<u>定理4.10</u>

負定値カーネル $\psi: \Omega \times \Omega \to C$ が常に非負値をとると仮定する．このとき，任意の $0 < p \leq 1$ に対し，

$$\psi(x, y)^p$$

も負定値である.

Remark 1: 定理4.7と合わせると，ユークリッド空間上

$$\|x - y\|^p$$

$(0 < p \leq 2)$ は負定値カーネルである.

Remark 2: Remark 1とSchoenbergの定理と合わせると,

$$\exp(-\alpha\|x - y\|^p)$$

（$0 < p \leq 2,\ \alpha > 0$）は正定値である.（Gauss, Laplace)

[定理4.10の証明]

次の公式が成り立つ(直接計算で容易に示される).

$$z^p = \frac{p}{\Gamma(1-p)} \int_0^\infty t^{-p-1} \left(1 - e^{-tz}\right) dt$$

したがって,

$$\psi(x,y)^p = \frac{p}{\Gamma(1-p)} \int_0^\infty t^{-p-1} \left(1 - e^{-t\psi(x,y)}\right) dt$$

被積分関数は, Schoenbergの定理より, 任意の $t > 0$ で負定値.
よって積分も有限和の極限として負定値.

Mercerの定理

積分作用素

– 積分作用素

(Ω, B, μ): 測度空間

$K: \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}$: 可測なカーネル（正定値性は仮定しない）

2乗可積分性を仮定

$$\iint |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty .$$

このとき

$$T_K: L^2(\Omega;\mu) \to L^2(\Omega;\mu)$$

を以下で定義

$$(T_k f)(x) \coloneqq \int K(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Kのことを積分核という.

[演習問題] 上の定義の $T_K f$が$L^2(\Omega;\mu)$の元であることを確認せよ.

Hilbert-Schmidt展開

– 積分核が2乗可積分かつHermiteとする i.e. $K(y,x)=\overline{K(x,y)}$. このとき，積分作用素 T_K は自己共役作用素.

$$(f,T_K g)_{L^2}=\int f(x)\overline{T_k g(x)}d\mu(x)=\int\int f(x)\overline{K(x,y)g(y)}d\mu(x)d\mu(y)$$
$$=\int\int K(y,x)f(x)d\mu(x)\overline{g(y)}\,d\mu(y)=\int T_K f(y)\overline{g(y)}d\mu(y)$$
$$=(T_K f,g)_{L^2}.$$

– 自己共役作用素は，対称行列（Hermite）行列の一般化.

– 固有値，固有ベクトル

$$T_K\phi=\lambda\phi \qquad (\lambda\text{: スカラー},\ \phi\in L^2(\Omega;\mu))$$

$$\int K(x,y)\phi(y)d\mu(y)=\lambda\phi(y)$$

c.f. 行列の場合 $\sum_j A_{ij}u_j=\lambda u_i$

<u>Fact:</u>　自己共役作用素の固有値は実で，異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する.

（証） $A\phi = \lambda\phi,\ A\psi = \nu\psi\ (\lambda \neq \nu)$，$\phi, \psi$は単位固有ベクトルとする. このとき，
$\lambda = \lambda(\phi,\phi) = (A\phi,\phi) = (\phi, A\phi) = (\phi, \lambda\phi) = \bar{\lambda}(\phi,\phi) = \bar{\lambda}$ より $\lambda \in \mathbf{R}$.
また，$\lambda(\phi,\psi) = (A\phi,\psi) = (\phi, A\psi) = \nu(\phi,\psi)$. ゆえに $(\lambda-\nu)(\phi,\psi) = 0$であるが，$\lambda \neq \nu$より，$(\phi,\psi) = 0$.

<u>定理4.11</u>（Hilbert-Schmidtの展開定理）

2乗可積分かつHermiteな積分核に対する積分作用素 T_Kの非零固有値を (λ_i), 対応する単位固有ベクトルを (ϕ_i) とするとき，

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x)\, \overline{\phi_i(y)}$$

が$L^2(\Omega \times, \Omega; \mu \times \mu)$の収束の意味で成立する.

– Hermite行列（対称行列）の固有分解に対応.

c.f.　$A_{ab} = \sum_i \lambda_i u_{ai} \overline{u_{bi}}$.

Mercerの定理

<u>定義</u>.　自己共役作用素 A が正値であるとは,

$$(f, Af) \geq 0$$

が成り立つことをいう.

<u>Fact 1:</u> K を$\mathbf{R}^d$ 上の連続な正定値カーネルとするとき, T_Kは正値作用素である.

$$\int\int K(x,y)f(x)f(y)d\mu(x)d\mu(y) \leftarrow \sum_{i,j=1}^{n} K(x_i,x_j)f(x_i)f(x_j)\mu(E_i)\mu(E_j) \geq 0.$$

<u>Fact 2:</u> 正値作用素の固有値は非負である.

$A\phi = \lambda\phi$とするとき, $\lambda(\phi,\phi) = (A\phi,\phi) \geq 0.$

定理4.12（Mercerの定理）

K を$\mathbf{R}^d$ のコンパクト集合Ω上の連続な正定値カーネルとする. T_Kの正の固有値を重複度だけ並べたものを $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots > 0$，対応する単位固有ベクトルを ϕ_i とするとき，

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)}$$

が成り立つ. ここで，収束は $\Omega \times \Omega$ 上の絶対かつ一様な収束である.

証明は福水（定理6.15）参照.

まとめ

- 正定値性を保つ操作
  - 非負結合,
  - 積
  - (各点での)極限
  - 正規化

- Bochnerの定理

  $\mathbf{R}^m$上の連続で平行移動不変な正定値カーネルのFourier変換による特徴づけ.

- RKHSの陽な形
  - 平行移動不変なカーネルに対するRKHS は，周波数領域に置いて陽な形で表現できる.
  - 多項式カーネルに対するRKHSは多項式の空間.
  - カーネルの和，積に対応して，和空間，積空間が定義される.

– 負定値カーネル
    - 負定値カーネルと正定値カーネルは密接な関係がある.
    - 負定値カーネルから，正定値カーネルを生成することが可能である.

– Mercerの定理
    - 正定値カーネルの固有展開が可能

References

福水 「カーネル法入門」 第6章　朝倉書店　2010

Aronszajn., N. Theory of reproducing kernels. *Trans. American Mathematical Society*, 68(3):337–404, 1950.

Saitoh., S. Integral transforms, reproducing kernels, and their applications. Addison Wesley Longman, 1997.

伊藤清三 「ルベーグ積分入門」裳華房 1963

van den Berg, C., Christensen, J. P. R., Ressel, P. *Harmonic Analysis on Semigroups*. Springer 1984

Solution to Exercises

- C-valued positive definiteness

Using the definition for one point, we have $k(x,x)$ is real and non-negative for all x. For any x and y, applying the definition with coefficient $(c, 1)$ where $c \in \mathbf{C}$, we have

$$|c|^2 k(x,x) + ck(x,y) + \bar{c}k(y,x) + k(y,y) \geq 0.$$

Since the right hand side is real, its complex conjugate also satisfies

$$|c|^2 k(x,x) + \bar{c}k\overline{(x,y)} + ck\overline{(y,x)} + k(y,y) \geq 0.$$

The difference of the left hand side of the above two inequalities is real, so that

$$\bar{c}\left(k(y,x) - k\overline{(x,y)}\right) - \overline{c\left(k(y,x) - k\overline{(x,y)}\right)}$$

is a real number. On the other hand, since $\alpha - \bar{\alpha}$ must be pure imaginary for any complex number α,

$$\bar{c}\left(k(y,x) - k\overline{(x,y)}\right) = 0$$

holds for any $c \in \mathbf{C}$. This implies $k(y,x) = \overline{k(x,y)}$.