

レポート用問題

正定値カーネルによる統計的データ解析

講師：福水健次

提出期限：2008年11月10日（月）

1. \mathcal{X} を集合、 $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。 $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$ 上の複素数値関数 $H(t, x)$ が、任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して $H(\cdot, x) \in L^2(\mathcal{T}, \mu)$ を満たすと仮定する。このとき

$$k(x, y) = \int_{\mathcal{T}} H(t, x) \overline{H(t, y)} d\mu(t)$$

で定義される \mathcal{X} 上のカーネルが正定値であることを証明せよ。

2. SVMの主問題が

$$\begin{aligned} \min_{w_i, b, \xi_i} & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w_i w_j k(X_i, X_j) + C \sum_{i=1}^N \xi_i, \\ \text{subject to} & \begin{cases} Y_i (\sum_{j=1}^N k(X_i, X_j) w_j + b) \geq 1 - \xi_i, \\ \xi_i \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

であることを用いて、双対問題が以下のようになることを示せ。

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j Y_i Y_j k(X_i, X_j) \quad \text{subject to} \begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C, \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i Y_i = 0 \end{cases}$$

3. 次のそれぞれのカーネルが正定値であることを証明せよ。

- (a) $\min(x, y)$ on $[0, \infty)$.
- (b) $\cos(x - y)$ on \mathbb{R} .
- (c) $\frac{1}{x+y}$ on $(0, \infty)$.
- (d) $\min(x, y) - xy$ on $[0, 1]$.