経験分布関数の理論と応用

塚原 英敦

成城大学経済学部

(tsukahar@seijo.ac.jp)

2012 年 9 月@統数研　夏期大学院

目次

1. はじめに

$X_1, \ldots, X_n$：$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上の i.i.d. 実確率変数列

$F(x) := \mathsf{P}(X_1 \leq x)$：共通の分布関数

経験分布関数

$$\mathbb{F}_n(x, \omega) = \mathbb{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

- $x \in \mathbb{R}$ を固定すると

$$n\mathbb{F}_n(x) \sim \mathrm{Bin}\big(n, F(x)\big)$$

よって，$\mathsf{E}\big(\mathbb{F}_n(x)\big) = F(x)$（**不偏性**）

- また，大数の強法則により，各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{F}_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} F(x)$$

が成り立つ（**強一致性**）

• さらに，Lindeberg-Lévy の中心極限定理から，
各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

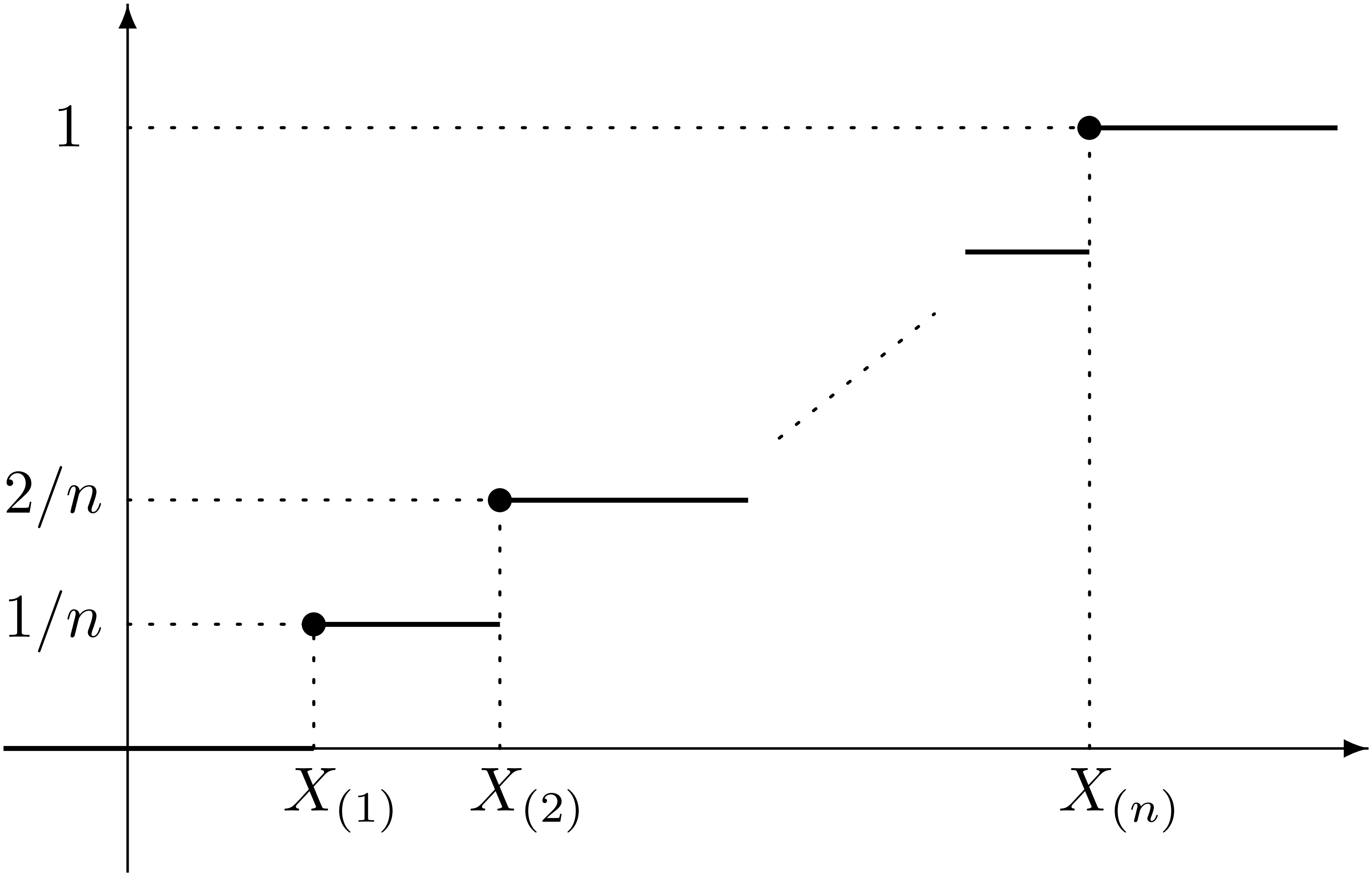
$$\sqrt{n}\left(\mathbb{F}_n(x) - F(x)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} N\big(0, F(x)\left(1 - F(x)\right)\big)$$

を得る（漸近正規性）

▶▶ $\omega \in \Omega$ を固定して，x についての関数とみると，

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$$

を順序統計量として，



1
2/n
1/n
X(1)
X(2)
X(n)

つまり，“ 経験分布関数 $\overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow}$ 順序統計量 ” である

$\mathcal{F}_{\mathsf{ac}} :=$ **絶対連続な分布関数全体**

$F \in \mathcal{F}_{\mathsf{ac}}$ **ならば，**

$$\mathsf{P}\Big[(X_1,\ldots,X_n)=(x_{(i_1)},\ldots,x_{(i_n)})\;\Big|\; (X_{(1)},\ldots,X_{(n)})=(x_{(1)},\ldots,x_{(n)})\Big]=\frac{1}{n!}$$

$\Longrightarrow \quad (X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$ **:** $\mathcal{F}_{\mathsf{ac}}$ **に対する十分統計量**

さらに $T = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ が $\mathcal{F}_{\mathsf{ac}}$ について完備であることを示すことができる．つまり，

$$\forall F \in \mathcal{F}_{\mathsf{ac}},\ \mathsf{E}_F(g(T)) = 0$$
$$\Rightarrow g = 0,\ \text{a.e.}\{\mathscr{L}_F(T) : F \in \mathcal{F}_{\mathsf{ac}}\}$$

(例えば，鍋谷 (1978)，定理 2.5.1, 2.5.2 参照)

►► Lehmann-Scheffé の定理により，

$\mathbb{F}_n(x)$：$F(x)$ の一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量

ノンパラメトリック (NP) MLE

NP 尤度：$L(F) = \prod_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_i-)]$

- $z_1 < \cdots < z_m$：$x_1, \ldots, x_n$ のうちの異なる値
- $n_j := \#\{x_i : x_i = z_j\}$
- $p_j := F(z_i) - F(z_i-), \quad \widehat{p_j} := n_j/n$

ここで，$\forall j,\, p_j > 0$，かつ $\exists j,\, p_j \neq \widehat{p}_j$ とすると，

$$\begin{aligned}
\log \frac{L(F)}{L(\mathbb{F}_n)} &= \log \prod_{i=1}^{n} \frac{p_j^{n_j}}{\widehat{p}_j^{\,n_j}} = \sum_{j=1}^{m} n_j \log \frac{p_j}{\widehat{p}_j} \\
&= n \sum_{j=1}^{m} \widehat{p}_j \log \frac{p_j}{\widehat{p}_j} < n \sum_{j=1}^{m} \widehat{p}_j \left(\frac{p_j}{\widehat{p}_j} - 1 \right) \leq 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mathbb{F}_n$ は F の NPMLE

2. 経験過程の理論（古典的アプローチ）

F の**分位関数**：$F^{-1}(u) := \inf\{x\colon F(x) \geq u\}$

（1 次元の場合の）基本定理

任意の分布関数 F に対して，

1. $F(x) \geq t \quad \Leftrightarrow \quad F^{-1}(t) \leq x$
2. $\xi \sim U(0,1)$ **のとき，** $X := F^{-1}(\xi) \sim F$

一様分布の場合への帰着

$\xi_1, \ldots, \xi_n$: i.i.d. $U(0,1)$ 確率変数列

$$\mathbb{G}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\xi_i \le t\}}$$

$$\mathbb{G}_n(F(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\xi_i \le F(x)\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{F^{-1}(\xi_i) \le x\}}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{F}_n \stackrel{\mathscr{L}}{=} \mathbb{G}_n(F)$$

確率積分変換

$X \sim F$ ならば，$\mathsf{P}(F(X) \leq t) \leq t,\ t \in [0,1]$．
等号成立は $t \in \overline{\mathrm{range}(F)}$ の場合に限る．故に

$$F \text{ が連続} \quad \Longrightarrow \quad F(X) \sim U(0,1)$$

F の $\forall$ 連続点 x に対して，$F_n(x) \to F(x)$

$$\Updownarrow$$

F^{-1} の $\forall$ 連続点 x に対して，$F_n^{-1}(x) \to F^{-1}(x)$

Glivenko-Cantelli の定理（一様大数の法則）

$$\|\mathbb{G}_n - I\| := \sup_{0<t<1} |\mathbb{G}_n(t) - t| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad n \to \infty$$

[証] $0 < k \leq M$ に対して，SLLN より

$$\mathbb{G}_n(k/M) - k/M \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad n \to \infty$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M$ s.t. $M^{-1} < \varepsilon$.

よって，$(k-1)/M \leq t \leq k/M$ ならば，

$$\mathbb{G}_n(t) - t \leq \mathbb{G}_n\left(\frac{k}{M}\right) - \frac{k-1}{M} = \mathbb{G}_n\left(\frac{k}{M}\right) - \frac{k}{M} + \frac{1}{M}$$

$$\mathbb{G}_n(t) - t \geq \mathbb{G}_n\left(\frac{k-1}{M}\right) - \frac{k}{M} = \mathbb{G}_n\left(\frac{k-1}{M}\right) - \frac{k-1}{M} + \frac{1}{M}$$

よって，

$$\sup_{0<t<1} |\mathbb{G}_n(t) - t| \leq \max_{0\leq k\leq M} \left|\mathbb{G}_n\left(\frac{k}{M}\right) - \frac{k}{M}\right| + \frac{1}{M}$$

$$\xrightarrow{\text{a.s.}} 0 + \frac{1}{M} < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

▶▶ $\sqrt{n}\,(\mathbb{F}_n(x) - F(x)) \xrightarrow{\mathscr{L}} N\bigl(0, F(x)\,(1 - F(x))\bigr)$
の一様化（関数版）は？

一様経験過程：$\mathbb{U}_n(t) := \sqrt{n}(\mathbb{G}_n(t) - t)$ **を用いると**

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,(\mathbb{F}_n(x) - F(x)) &\overset{\mathscr{L}}{=} \sqrt{n}\,(\mathbb{G}_n(F(x)) - I(F(x))) \\ &= \mathbb{U}_n(F(x))\end{aligned}$$

となり，一様分布の場合に帰着される．

有限次元分布

- **確率過程** $X := \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ **の有限次元分布とは，** $(X(t_1),\ldots,X(t_k))$ **の** $\mathbb{R}^k$ **上の分布のことである** ($t_1 < \cdots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$)

- $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$ **：**X **と** Y **の全ての有限次元分布が一致**

- $X_n \xrightarrow{\text{f.d.}} X$ **とは，** $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t_1 < \cdots < t_k$,

$$(X_n(t_1),\ldots,X_n(t_k)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X(t_1),\ldots,X(t_k))$$

経験過程の場合，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{U}_n(t_1) \\ \vdots \\ \mathbb{U}_n(t_k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\{\xi_i \le t_1\}} - t_1 \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{\{\xi_i \le t_k\}} - t_k \end{pmatrix}$$

$\mathrm{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_i \le t_j\}}) = t_j$ **と** $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_{\{\xi_i \le t_j\}}, \mathbf{1}_{\{\xi_i \le t_l\}}) = t_j \wedge t_l - t_j t_l$ **だから，多次元** CLT **より，**

$$\mathbb{U}_n \xrightarrow{\text{f.d.}} \mathbb{U}$$

ただし，$\mathbb{U}$ **はブラウン橋** (Brownian bridge)

ブラウン橋 (Brownian bridge)

ブラウン橋 $\mathbb{U} = \{\mathbb{U}(t)\}_{t\in[0,1]}$ は

$$\mathsf{E}(\mathbb{U}(t)) = 0, \quad \mathsf{Cov}(\mathbb{U}(s), \mathbb{U}(t)) = s \wedge t - st$$

を満たす，標本路が連続なガウス過程である．

ブラウン運動 $\mathbb{S}$ から，

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{S}(t) - t\,\mathbb{S}(1)$$

としても構成できる．

Doob(1949)：

"We shall assume, until a contradiction frustrates our devotion to heuristic reasoning, that *in calculating asymptotic* $\mathbb{U}_n(t)$ *process distributions when* $n \to \infty$ *we may simply replace the* $\mathbb{U}_n(t)$ *processes by the* $\mathbb{U}(t)$ *process*. It is clear that this cannot be done in all possible situations, but let the reader who has never used this sort of reasoning exhibit the first counter example."

Kolmogorov-Smirnov **統計量** $\|\mathbb{U}_n\|$ **の漸近分布が** $\|\mathbb{U}\|$ **の分布と一致するが，** $\mathbb{U}_n \xrightarrow{\text{f.d.}} \mathbb{U}$ **だけからは導かれない．**

$$\Downarrow$$

標本路の属する関数空間上の，写像 $\omega \mapsto \mathbb{U}_n(\,\cdot\,,\omega)$ **により誘導される確率測度列の収束**

$$\Downarrow$$

弱収束理論 (weak convergence theory) **が必要**

各 ω に対して，$\mathbb{U}_n(\,\cdot\,,\omega)$ は $[0,1]$ 上の実数値関数：

$$\mathbb{U}_n(\,\cdot\,,\omega) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$$

$\mathbb{R}^{[0,1]}$ は大きすぎる．$\mathbb{U}_n(\,\cdot\,,\omega)$ は連続ではないが，

$$\mathbb{U}_n(\,\cdot\,,\omega) \in D[0,1]$$

$D[0,1]$：[0,1] 上の右連続で左極限をもつ実関数全体

一方，$\mathbb{U}(\,\cdot\,,\omega) \in C[0,1] :=$[0,1] 上の実連続関数全体

距離空間上の確率測度の弱収束

(S, d)：距離空間，　$\mathscr{B}_d(S)$：Borel 集合体

P，P_n $(n \in \mathbb{N})$：$(S, \mathscr{B}_d(S))$ 上の確率測度

定義：P_n が P に弱収束するとは，

$$\int_S f(s)\, P_n(ds) \to \int_S f(s)\, P(ds), \ \ f \in C_b(S)$$

が成り立つことをいい，$P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$ と書く．

X と X_n：S 値確率変数

i.e., $\forall B \in \mathscr{B}_d(S)$, $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ & $X_n^{-1}(B) \in \mathscr{F}$

定義：X_n が X に**法則収束（分布収束）**するとは，X_n の分布 P_{X_n} が X の分布 P_X に弱収束することをいう．このとき，$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ と書く．

注：$P_X(B) = \mathsf{P}(X \in B)$, $B \in \mathscr{B}_d(S)$

$P_{X_n}(B) = \mathsf{P}(X_n \in B)$, $B \in \mathscr{B}_d(S)$

Portmanteau 定理

次の 5 つの条件は同値である：

(i) $P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$

(ii) $\forall f \in C_{ub}(S)$ **に対して，** $\int f\, dP_n \to \int f\, dP$

(iii) $\forall$ **閉集合** F **に対して，** $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$

(iv) $\forall$ **開集合** G **に対して，** $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$

(v) $\forall P$-**連続集合** A **（**i.e., $P(\partial A) = 0$**）に対して，**
$P_n(A) \to P(A)$

連続写像定理

(S, d), (S', d')：距離空間

$h\colon S \to S'$：Borel 可測

D_h：h の不連続点全体から成る集合

P_n，P：(S, d) 上の確率測度

定理

$$P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P,\ P(D_h) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n h^{-1} \xrightarrow{\mathrm{w}} P h^{-1}$$

P_n と P がそれぞれ S 値確率変数 X_n と X の分布であると考えると，上の定理は

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \text{ かつ } \mathsf{P}(X \in D_h) = 0$$
$$\Longrightarrow\ h(X_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} h(X)$$

となることを意味する．

▶▶ この定理における関数 h が n に依存する場合への拡張は応用上有用（Topsøe）

弱収束の十分条件

- (S,d) 上の確率測度の集合 $\{P_\alpha\}$ が一様に緊密 (uniformly tight) であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\varepsilon \text{ コンパクト s.t. } \inf_\alpha P_\alpha(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

- (S,d) 上の確率測度の集合 $\{P_\alpha\}$ が相対コンパクト (relatively compact) であるとは，$\{P_\alpha\}$ に含まれる任意の列 (P_n) が弱収束する部分列をもつことをいう．

$$\left.\begin{array}{l}\{P_n\}\text{ が相対コンパクト}\\ \text{極限 }P\text{ を一意に識別する条件}\end{array}\right\} \Longrightarrow \ P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$$

►► $C[0,1]$ や $D[0,1]$ の場合，極限 P を一意に識別する条件として有限次元分布の収束が有効

相対コンパクト性は直接示し難いため，チェックしやすい（必要）十分条件が欲しい

$$\Downarrow$$

Prohorov の定理

(i) $\{P_\alpha\}$ が一様に緊密ならば，$\{P_\alpha\}$ は相対コンパクトである．

(ii) (S,d) が完備かつ可分のとき，$\{P_\alpha\}$ が相対コンパクトならば，$\{P_\alpha\}$ は一様に緊密である．

★ $\left.\begin{array}{l}\{P_n\}\text{ が一様に緊密}\\ \text{極限 } P \text{ を一意に識別する条件}\end{array}\right\} \Longrightarrow\ P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$

Skorohod-Dudley-Wichura の表現定理

$(P_n) \xrightarrow{\mathrm{w}} P$ ならば，適当な確率空間上に確率変数 $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ を構成して，$Y_n \sim P_n$，$Y \sim P$，$Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$ が成り立つようにできる．

- (S, d) が完備かつ可分のとき：Skorohod (1956)
- (S, d) が可分のとき：Dudley (1968)
- (S, d) は一般の距離空間で，P の台が可分なとき：Wichura (1970)

距離空間 C と D

$\sup$ 距離：$\|x-y\| := \sup_{0\le t\le 1} |x(t)-y(t)|$

►► $(C, \|\cdot\|)$ は完備かつ可分

3 つの σ 集合体

$$\mathscr{C} := \sigma(\text{有限次元集合}), \quad \mathscr{C}_{\|\cdot\|} := \sigma(\|\cdot\|\text{-開集合})$$

$$\mathscr{C}^{B}_{\|\cdot\|} := \sigma(\|\cdot\|\text{-開球})$$

は一致する．

▶▶ $(D, \|\cdot\|)$ は可分でない

$\mathscr{D} := \sigma($有限次元集合$), \quad \mathscr{D}_{\|\cdot\|} := \sigma(\|\cdot\|$-開集合$)$

$\mathscr{D}^{B}_{\|\cdot\|} := \sigma(\|\cdot\|$-開球$)$

について，$\mathscr{D} = \mathscr{D}^{B}_{\|\cdot\|} \subsetneq \mathscr{D}_{\|\cdot\|}$

[$\phi_t = \mathbf{1}_{[t,1]}$ で定義される $\phi\colon [0,1] \to D$ は可測 ($\mathscr{D}$)

$A = \bigcup_{t\in H} B_{\|\cdot\|}(\phi_t, 1/2)$ は $\|\cdot\|$ 開集合，$\phi^{-1}A = H$

H を非可測集合ととれば ϕ_t は可測 ($\mathscr{D}_{\|\cdot\|}$) でない]

$\omega \mapsto \mathbb{U}_n(\,\cdot\,,\omega)$ **は可測** ($\mathscr{F}/\mathscr{D}_{\|\cdot\|}$) **でない可能性**

$\Longrightarrow \mathbb{U}_n$ **の分布** $\mathrm{P}\mathbb{U}_n^{-1}$ **が定義できない．**

★ **対処法：**

1. Skorohod **の** J_1 **位相** $\Rightarrow D$ **は完備可分**
2. **距離は** $\|\cdot\|$ **のまま，**$(D,\mathscr{D}^B_{\|\cdot\|})$ **を考える**

   (Dudley, Wichura ‘ $\overset{\mathrm{w}^\circ}{\longrightarrow}$ ’ **理論)**
3. **可測性の要請を捨てる**

   (Hoffmann-Jørgensen & Dudley **理論)**

文献案内

- 2 を採用して，1 次元経験過程を主に扱った大書：
Shorack & Wellner('86)

- 1 はセミマルチンゲールや確率積分の弱収束：
Ethier & Kurtz('86), Jacod & Shiryaev('87)

- 3 が経験過程を扱う現代の流儀：
Dudley('99), van der Vaart & Wellner('96)

C における一様緊密性

連続係数： $w_x(\delta) = \sup_{|s-t|\le\delta} |x(s) - x(t)|$

$(C, \mathscr{C})$ **上の確率測度列** (P_n) **が一様に緊密** $\Leftrightarrow$

(i) $\forall\eta > 0,\ \exists a\ \&\ n_0$ s.t.

$$P_n(x\colon |x(0)| \ge a) \le \eta,\ n \ge n_0$$

(ii) $\forall\varepsilon,\ \eta > 0,\ \exists\delta\ \&\ n_0$ s.t.

$$P_n(x\colon w_x(\delta) \ge \varepsilon) \le \eta,\ n \ge n_0$$

D における一様緊密性

極限の台が D である場合，その条件はやや複雑

(Billingsley('99) 参照)

経験過程の場合に便利な条件

$(D, \mathscr{D})$ 上の確率測度列 (P_n) に対して，C での一様緊密性の条件 (i), (ii) が成り立っていれば，(P_n) は一様緊密であり，収束部分列の極限 P は $P(C) = 1$ を満たす．

この条件を用いることによって，

Donsker の定理

$(D, \mathscr{D}, \|\cdot\|)$ **において，**

$$\mathbb{U}_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathbb{U}, \quad n \to \infty$$

統計への応用にはこのままでは不便

以下， S&W ('86), Shorack(2000) **に従う**

いくつかの経験過程

$\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$：i.i.d. $U(0,1)$ 確率変数の 3 角列

$$\mathbb{G}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\xi_{ni} \le t\}}$$

$$\mathbb{U}_n(t) := \sqrt{n}(\mathbb{G}_n(t) - t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{1}_{\{\xi_{ni} \le t\}} - t\right]$$

前に計算したように，

$$\mathrm{E}(\mathbb{U}_n(t)) = 0, \quad \mathrm{Cov}(\mathbb{U}_n(s), \mathbb{U}_n(t)) = s \wedge t - st$$

経験分位関数 (empirical quantile)：

$$\mathbb{G}_n^{-1}(t) := \inf\{u \in [0,1] \colon \mathbb{G}_n(u) \geq t\}$$

経験分位過程 (empirical quantile process)：

$$\mathbb{V}_n(t) := \sqrt{n}(\mathbb{G}_n^{-1}(t) - t)$$

恒等式

$$\mathbb{U}_n(t) = -\mathbb{V}_n(\mathbb{G}_n) + \sqrt{n}(\mathbb{G}_n^{-1} \circ \mathbb{G}_n - I)$$

$$\mathbb{V}_n(t) = -\mathbb{U}_n(\mathbb{G}_n^{-1}) + \sqrt{n}(\mathbb{G}_n \circ \mathbb{G}_n^{-1} - I)$$

図を描くとわかること：

$$\|\mathbb{G}_n \circ \mathbb{G}_n^{-1} - I\| = \frac{1}{n}$$
$$\|\mathbb{G}_n^{-1} \circ \mathbb{G}_n - I\| = \max_{1 \le i \le n+1} (\xi_{n:i} - \xi_{n:i-1})$$

さらに，

$$\|\mathbb{G}_n - I\| = \|\mathbb{G}_n^{-1} - I\|$$

Glivenko-Cantelli **定理より**

$$\|\mathbb{G}_n - I\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \|\mathbb{G}_n^{-1} - I\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

加重経験過程

$c_{n1}, \ldots, c_{nn}$：（基準化された）定数の列

$$\overline{c}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ni} = 0, \quad \sigma_{c,n}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(c_{ni} - \overline{c}_n)^2 = 1$$

- UAN 条件：$\displaystyle \max_{1 \le i \le n} \frac{|c_{ni}|}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to \infty$

を通常仮定する．

加重経験過程 (weighted empirical process)

$$\mathbb{W}_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_{ni} \left[\mathbf{1}_{\{\xi_{ni} \le t\}} - t \right]$$

$$\mathsf{E}(\mathbb{W}_n(t)) = 0$$

$$\mathsf{Cov}(\mathbb{W}_n(s), \mathbb{W}_n(t)) = \sigma^2_{c,n}(s \wedge t - st) = s \wedge t - st$$

$$\mathsf{Cov}(\mathbb{U}_n(s), \mathbb{W}_n(t)) = \overline{c}_n(s \wedge t - st) = 0$$

$\Rightarrow \mathbb{W}_n \xrightarrow{\mathrm{f.d.}} \mathbb{W}$,　**$\mathbb{W}$ は $\mathbb{U}$ と独立なブラウン橋**

$(R_{n1}, \ldots, R_{nn})$：$\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ の順位

$(D_{n1}, \ldots, D_{nn})$：反順位

$$\xi_{nD_{ni}} = \xi_{n:i}, \quad \xi_{ni} = \xi_{n:R_{ni}}$$

有限抽出過程 (empirical finite sampling process)：

$$\mathbb{R}_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[(n+1)t]} c_{nD_{ni}}$$

恒等式

$$\mathbb{W}_n = \mathbb{R}_n(\widetilde{\mathbb{G}}_n), \quad \mathbb{R}_n = \mathbb{W}_n(\widetilde{\mathbb{G}}_n^{-1})$$

[$\widetilde{\mathbb{G}}_n$, $\widetilde{\mathbb{G}}_n^{-1}$ は $\mathbb{G}_n$, $\mathbb{G}_n^{-1}$ の線形化バージョン]

順序統計量 $\xi_{n:1}, \ldots, \xi_{n:n}$ と順位 $(R_{n1}, \ldots, R_{nn})$ は独立

$$\Downarrow$$

$\mathbb{R}_n$ と $\mathbb{V}_n$ は独立

単純線形順位統計量

$$
\begin{aligned}
T_n &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_{ni} K\left(\frac{R_{ni}}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{i}{n+1}\right) c_{nD_{ni}} \\
&= \int_0^1 K \, \mathrm{d}\mathbb{R}_n = -\int_0^1 \mathbb{R}_n \, \mathrm{d}K
\end{aligned}
$$

[**最後の** $=$ **は** K **が有界変動かつ左連続なら** OK]

特別構成 (special construction) 定理：

単一の確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ **上に，行独立な** $U(0,1)$ 3 **角列** $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ **と独立な** 2 **つのブラウン橋** $\mathbb{U} = -\mathbb{V}$ **と** $\mathbb{W}$ **が次の条件を満たすように構成できる：**

$$\|\mathbb{U}_n - \mathbb{U}\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \|\mathbb{V}_n - \mathbb{V}\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

$$\|\mathbb{W}_n - \mathbb{W}\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \|\mathbb{R}_n - \mathbb{R}\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

ただし，$\{c_{ni}\}$ **は** UAN **条件を満たし，**$\bar{c}_n = 0,\, \sigma^2_{c,n} = 1$

Pyke-Shorack の定理：

q：$(0,1)$ 上の正の関数，$(0,\frac{1}{2}]$ で増加，$[\frac{1}{2},1)$ で減少

かつ $\displaystyle\int_0^1 [q(t)]^{-2}\,\mathrm{d}t < \infty$ **[例**: $[t(1-t)]^{1/2-\delta}$**]**

このとき，上の特別構成に対して，

$$\|(\mathbb{U}_n-\mathbb{U})/q\| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad \|(\mathbb{V}_n-\mathbb{V})/q\| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$$

$$\|(\mathbb{W}_n-\mathbb{W})/q\| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad \|(\mathbb{R}_n-\mathbb{R})/q\| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$$

適合度検定

特別構成の $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ **を用いて，** $X_{ni} := F^{-1}(\xi_{ni})$

$\Rightarrow \quad X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ i.i.d. F

$$\mathbb{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_{ni} \le x\}}$$ **：経験分布関数**

$\mathbb{E}_n(x) := \sqrt{n}(\mathbb{F}_n(x) - F(x)) = \mathbb{U}_n(F(x))$ **とおくと**

$$\|\mathbb{E}_n(x) - \mathbb{U}(F)\| \le \|\mathbb{U}_n - \mathbb{U}\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

Kolmogorov-Smirnov 統計量 （F：連続）

片側：$\sqrt{n}\,\sup_x (\mathbb{F}_n(x) - F(x))^+ = \|\mathbb{U}_n^+\| \overset{\text{a.s.}}{\longrightarrow} \|\mathbb{U}^+\|$

両側：$\sqrt{n}\,\sup_x |\mathbb{F}_n(x) - F(x)| = \|\mathbb{U}_n\| \overset{\text{a.s.}}{\longrightarrow} \|\mathbb{U}\|$

►► $\mathbb{R}_+$ **上の** BM $\mathbb{S}$ **について，** $c \geq 0,\ d > 0$

(i) $\mathrm{P}(\exists t \geq 0,\ \mathbb{S}(t) \geq ct + d) = \exp(-2cd)$

(ii) $\mathrm{P}(\exists t \geq 0,\ |\mathbb{S}(t)| \geq ct + d)$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \exp(-2k^2 cd)$$

(i) $\mathsf{P}(\|\mathbb{U}^+\| > b) = \exp(-2b^2)$

(ii) $\mathsf{P}(\|\mathbb{U}\| > b) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\exp(-2k^2b^2)$

$$\because \quad \mathsf{P}(\|\mathbb{U}^+\| > b) = \mathsf{P}(\exists t \in (0,1),\ \mathbb{U}(t) > b)$$
$$= \mathsf{P}\left(\exists t \in (0,1),\ (1-t)\mathbb{S}\left(\frac{t}{1-t}\right) > b\right)$$
$$= \mathsf{P}\left(\exists r > 0,\ \frac{1}{1+r}\mathbb{S}(r) > b\right)$$
$$= \mathsf{P}(\exists r > 0,\ \mathbb{S}(r) > b + rb) = \exp(-2b^2)$$

Cramer-von Mises 統計量 （F：連続）

$$n\int[\mathbb{F}_n(x)-F(x)]^2\,\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_0^1\mathbb{U}_n^2(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow{\text{a.s.}}\int_0^1\mathbb{U}^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$\mathbb{U}$ の Karhunen-Loéve 展開：

$$Y(t):=\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k(t)\frac{1}{\pi k}Z_k$$

$Z_1, Z_2, \ldots$：i.i.d. $N(0,1)$

$\phi_k(t) = \sqrt{2}\sin(\pi k t)$, $k = 1, 2, \ldots$：L^2 の正規直交系

Parseval の恒等式から

$$\int_0^1 Y^2(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} Z_k^2$$

$\mathbb{U} \overset{\mathscr{L}}{=} Y$ を示せば $\int_0^1 \mathbb{U}^2(t)\,\mathrm{d}t$ の分布が近似計算できる．

Anderson-Darling 統計量　（F：連続）

$$
\begin{aligned}
A_n &:= n \int \frac{[\mathbb{F}_n(x) - F(x)]^2}{F(x)(1-F(x))} \mathrm{d}F(x) \\
&= \int_0^1 \frac{\mathbb{U}_n^2(t)}{t(1-t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_0^1 \frac{\mathbb{U}^2(t)}{t(1-t)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^1 \frac{\mathbb{U}^2(t)}{t(1-t)}\,\mathrm{d}t \overset{\mathscr{L}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} Z_k^2
$$

が知られている．

L 統計量の漸近正規性

$X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ i.i.d. F（特別構成から）

$X_{n:1} < \cdots < X_{n:n}$：順序統計量

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ni} h(X_{n:i})$$

の形の統計量を L **統計量**という．

(linear combination of functions of order statistics)

$$T_n = \int_0^1 h(\mathbb{F}_n^{-1}(u)) J_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[0,1]} h(\mathbb{F}_n^{-1}(u))\,\mathrm{d}\Psi_n(u)$$

$$J_n(u) := \sum_{i=1}^n c_{ni} \mathbf{1}_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(u) + c_{n1} \mathbf{1}_{\{0\}}(u),$$

$$\Psi_n(u) := \int_{1/2}^u J_n(v)\,\mathrm{d}v$$

中心化定数：$g := h \circ F^{-1}$ **とおいて，**

$$\mu_n := \int_0^1 g(u) J_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[0,1]} g(u)\,\mathrm{d}\Psi_n(u)$$

仮定：

- $B(u) := Mu^{-b_1}(1-u)^{-b_2}$, $|J_n| \le B$, $|J| \le B$
- $h = h_1 - h_2$, h_1 & h_2 **は左連続増加関数で，**

$$|h_i(F^{-1})| \le H, \quad H(u) := Mu^{-d_1}(1-u)^{-d_2}$$

- $|g|$-**ほとんどすべての** u **に対して，** J **は** u **で連続，かつ** $J_n \to J$ **（局所一様）**

$b_i + d_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$ **を仮定する**

$$
\begin{aligned}
T_n - \mu_n &= \int_{[0,1]} g \circ \mathbb{G}_n^{-1} \, \mathrm{d}\Psi_n - \int_{[0,1]} g \, \mathrm{d}\Psi \\
&= \int_{[0,1]} g \, \mathrm{d}\big[\Psi_n \circ \mathbb{G}_n - \Psi_n\big] \\
&= -\int_{[0,1]} \big[\Psi_n \circ \mathbb{G}_n - \Psi_n\big] \, \mathrm{d}g \\
&= -\int_{[0,1]} \big[\Psi_n \circ \mathbb{G}_n - \Psi_n - (\mathbb{G}_n - I)J\big] \, \mathrm{d}g \\
&\qquad\qquad - \int_{[0,1]} \big[\mathbb{G}_n - I\big] J \, \mathrm{d}g \\
&=: -\gamma_n - S_n
\end{aligned}
$$

$$\sqrt{n}\gamma_n = \int_0^1 \mathbb{U}_n(u) A_n(u)\,\mathrm{d}g(u)$$

$$\sqrt{n}|\gamma_n| \leq \|\mathbb{U}_n/q\| \int_0^1 |A_n(u)| q(u)\,\mathrm{d}|g|(u)$$

ただし，

$$A_n(u) := \frac{1}{\mathbb{G}_n(u) - u} \int_u^{\mathbb{G}_n(u)} J_n(v)\,\mathrm{d}v - J(u)$$

Glivenko-Cantelli 定理より，$A_n \to 0$, $|g|$-a.e.

仮定より，$|A_n(u)| \le B(\mathbb{G}_n(u)) \vee B(u) + B(u)$

▶▶ $\mathbb{G}_n$ と $\mathbb{G}_n^{-1}$ に対する確率的線形限界

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\lambda$ & $A_{n,\varepsilon}$, $\mathsf{P}(A_{n,\varepsilon}) \ge 1-\varepsilon$ s.t. $A_{n,\varepsilon}$ 上で

$$\mathbb{G}_n(t) \le t/\lambda,\ t \in [0,1], \quad \mathbb{G}_n(t) \ge \lambda t,\ t \in [\xi_{n:1}, 1]$$

$$\mathbb{G}_n(1-t) \le 1-\lambda(1-t),\ t \in [0, \xi_{n:n}),$$

$$\mathbb{G}_n(1-t) \ge 1-(1-t)/\lambda,\ t \in [0,1]$$

を用いると，$\sqrt{n}|\gamma_n| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ が言える．

$$\sqrt{n}S_n = \int_0^1 \mathbb{U}_n J \, \mathrm{d}g = \int_0^1 \frac{\mathbb{U}_n - \mathbb{U}}{q} Jq \, \mathrm{d}g + \int_0^1 \mathbb{U} J \, \mathrm{d}g$$

$$\left| \int_0^1 \frac{\mathbb{U}_n - \mathbb{U}}{q} Jq \, \mathrm{d}g \right| \le \left\| \frac{\mathbb{U}_n - \mathbb{U}}{q} \right\| \int_0^1 Bq \, \mathrm{d}g \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$$

よって，

$$\sqrt{n}(T_n - \mu_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} -\int_{[0,1]} \mathbb{U}(u) J(u) \, \mathrm{d}g(u) \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 := \int_0^1 \int_0^1 (u \wedge v - uv) J(u) J(v) \, \mathrm{d}g(u) \mathrm{d}g(v)$$

2 標本問題

$$X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d. } F_1$$

$$Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d. } F_2 \qquad N := m + n$$

帰無仮説 $H_0 : F_1 = F_2$ の検定

特別構成：

$$X_{m1} = F_1^{-1}(\xi_{m1}^{(1)}), \ldots, X_{mm} = F_1^{-1}(\xi_{mm}^{(1)})$$

$$Y_{n1} = F_2^{-1}(\xi_{n1}^{(2)}), \ldots, Y_{nn} = F_2^{-1}(\xi_{nn}^{(2)})$$

$\mathbb{F}_{1m}$：$X_{m1}, \ldots, X_{mm}$ **の経験分布関数**

$\mathbb{F}_{2m}$：$Y_{n1}, \ldots, Y_{nn}$ **の経験分布関数**

H_0 **の下での**

$$\sqrt{\frac{mn}{N}}(\mathbb{F}_{1m} - \mathbb{F}_{2n})$$

分布を求めるには，共通の df **を** F**，**$\lambda_N := \frac{m}{N}$ **として，**

$$\sqrt{\frac{mn}{N}}(\mathbb{F}_{1m} - \mathbb{F}_{2n}) = \sqrt{1-\lambda_N}\,\mathbb{U}_{1m}(F) - \sqrt{\lambda_N}\,\mathbb{U}_{2n}(F)$$

2 標本 Kolmogorov-Smirnov 検定

F が連続とすると，H_0 の下で（$\lambda_N \to \lambda > 0$）

$$\sqrt{\frac{mn}{N}}\|\mathbb{F}_{1m} - \mathbb{F}_{2n}\| = \left\|\sqrt{1-\lambda_N}\,\mathbb{U}_{1m} - \sqrt{\lambda_N}\,\mathbb{U}_{2n}\right\|$$
$$\xrightarrow{\text{a.s.}} \left\|\sqrt{1-\lambda}\,\mathbb{U}_1 - \sqrt{\lambda}\,\mathbb{U}_2 w\right\|$$

$\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ は独立なブラウン橋

$\Longrightarrow \quad \sqrt{1-\lambda}\,\mathbb{U}_1 - \sqrt{\lambda}\,\mathbb{U}_2$ もブラウン橋

Chernoff-Savage 問題

$$H_N := \lambda_N F_1 + (1-\lambda_N)F_2$$

$$\mathbb{H}_N := \lambda_N \mathbb{F}_{1m} + (1-\lambda_N)\mathbb{F}_{2n}$$

：プールした標本の経験分布関数

- 検定統計量：$T_N := \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} c_{Ni} Z_{Ni}, \quad c_{Ni}$：定数，

$$Z_{Ni} = \begin{cases} 1 & \text{プールした標本中 } i \text{ 番目に大きいもの} \in \{X_{mi}\} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

スコア関数 J_N を

$$J_N(t) := c_{Ni}, \quad \frac{i-1}{N} < t \leq \frac{i}{N},\ i = 1, \ldots, N$$

で定義すると

$$T_N = \int J_N(\mathbb{H}_N)\,\mathrm{d}\mathbb{F}_{1m}$$

中心化定数：$\mu_N := \int J(H_N)\,\mathrm{d}F_1$

仮定

1. $\exists \lambda_0 \in (0, \frac{1}{2})$, $\lambda_0 \leq \lambda_N \leq 1 - \lambda_0$
2. $\exists J$, $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{N-1} |c_{Ni} - J(i/N)| \to 0 \quad (N \to \infty)$
3. $N^{-1/2} c_{NN} \to 0 \quad (N \to \infty)$
4. J **は連続な導関数** J' **をもち，** $\exists \delta > 0$,

$$|J| \leq [I(1-I)]^{-1/2+\delta}, \quad |J'| \leq [I(1-I)]^{-3/2+\delta},$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{m}(T_N - \mu_N) \\
&= \int \sqrt{m}[J(\mathbb{H}_N) - J(H_N)] \, \mathrm{d}\mathbb{F}_{1m} + \int J(H_N) \, \mathrm{d}\sqrt{m}(\mathbb{F}_{1m} - F_1) \\
&= \int \frac{J_N(\mathbb{H}_N) - J(H_N)}{\mathbb{H}_N - H_N} \sqrt{m}(\mathbb{H}_N - H_N) \, \mathrm{d}\mathbb{F}_{1m} \\
&\qquad + \int J(H_N) \, \mathrm{d}\mathbb{U}_{1m} \\
&\stackrel{a}{=} \int J'(H_N)[\lambda_N \mathbb{U}_{1m}(F_1) + \sqrt{\lambda(1-\lambda)}\mathbb{U}_{2n}(F_2)] \, \mathrm{d}\mathbb{F}_{1m} \\
&\qquad + \int J(H_N) \, \mathrm{d}\mathbb{U}_{1m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{m}(T_N - \mu_N) \\
&\stackrel{a}{=} \lambda_N \int J'(H_N)\mathbb{U}_{1m}(F_1)\,\mathrm{d}F_1 \\
&\qquad\qquad + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \int J'(H_N)\mathbb{U}_{2n}(F_2)\mathrm{d}F_1 \\
&\qquad\qquad\qquad - \int \mathbb{U}_{1m}(F_1)J'(H_N)\,\mathrm{d}[\lambda_N F_1 + (1-\lambda_N)F_2] \\
&= \sqrt{1-\lambda_N}\Bigg[\sqrt{\lambda_N} \int J'(H_N)\mathbb{U}_{2n}(F_2)\mathrm{d}F_1 \\
&\qquad\qquad\qquad - \sqrt{1-\lambda_N} \int J'(H_N)\mathbb{U}_{1m}(F_1)\mathrm{d}F_2\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \sqrt{m}(T_N - \mu_N) & \\
\stackrel{a}{=} \sqrt{1-\lambda_N} \Bigg[& \sqrt{\lambda_N} \int J'(H_N)\mathbb{U}_2(F_2)\mathrm{d}F_1 \\
& - \sqrt{1-\lambda_N} \int J'(H_N)\mathbb{U}_1(F_1)\mathrm{d}F_2 \Bigg]
\end{aligned}
$$

この確率変数は平均 0 の正規分布に従う．分散も $\mathbb{U}_1$ と $\mathbb{U}_2$ の独立性から容易に計算できる．

例： $c_{Ni} = i/N$ (Wilcoxon)

$c_{Ni} = \Phi^{-1}(i/(N+1))$ (van der Waerden)

漸近的最適性 1：たたみ込み定理 (Beran(1977))

F の推定量の列 $(\widehat{F}_n)$ が正則 (regular) であり，その極限過程が C 上の $\mathbb{Z}$ であるとき，

$$\mathbb{Z} \stackrel{\mathscr{L}}{=} \mathbb{U}(F) + \mathbb{W}$$

が成り立つ．ここで，ブラウン橋 $\mathbb{U}$ と $\mathbb{W}$ は独立である．

漸近的最適性 2：漸近ミニマックス性

(Dvoretsky et al.(1956), Millar(1979))

w を適当なクラスの損失関数，D_n を確率化決定関数，$(\widehat{F}_n)$ を F の任意の推定量列として，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sup_F \mathsf{E}_F\left[w(\|\sqrt{n}(\mathbb{F}_n - F)\|)\right]}{\sup_{b\in D_n} \sup_F \mathsf{E}_F\left[\int w(\|\sqrt{n}(\widehat{F}_n - F)\|) b(\mathrm{d}\widehat{F}_n, \boldsymbol{X})\right]} = 1$$

DKW 最大不等式：Dvoretsky, Kiefer and Wolfowitz

$$\mathrm{P}(\sup_x |\mathbb{F}_n(x) - F(x)| > z) \leq Ce^{-2nz^2}, \quad z > 0$$

ここで $C > 0$ は F に依存しない定数である（$C = 2$ が最良）．

　この不等式の多次元への拡張は Kiefer によってなされた (Kiefer(1961) 参照)．この不等式は非常に強力であり，これを用いて例えば Glivenko-Cantelli の定理を強めた結果を証明できる．

重複対数の法則 (laws of the iterated logarithm)

- Smirnov：

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|\mathbb{U}_n\|}{\sqrt{2\log\log n}} = \frac{1}{2}$$

- Chung：$\lambda_n \nearrow$ に対して

$$\mathsf{P}(\|\mathbb{U}_n\| \leq \lambda_n,\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0 & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2/n)\exp(-2\lambda_n^2) < \infty \\ 1 & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2/n)\exp(-2\lambda_n^2) = \infty \end{cases}$$

Strassen 型の関数重複対数の法則

D に標本路をもつ確率過程

$$\frac{\mathbb{U}_n}{\sqrt{2\log\log n}}$$

は D 上 $\|\cdot\|$ に関して P-a.s. 相対コンパクトであり，その集積点全体は

$$\mathscr{H} = \left\{ h \colon \text{絶対連続，} h(0) = h(1) = 0, \int_0^1 [h'(t)]^2 \, dt \leq 1 \right\}$$

（Finkelstein，James）

Hungarian 構成 (強不変原理) の一例：

$U(0,1)$ 確率変数列 (ξ_n) とブラウン橋の列 $(\mathbb{B}_n)$ をある (共通の) 確率空間上に

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2} \|\mathbb{U}_n - \mathbb{B}_n\| < \infty, \quad \text{a.s.}$$

を満たすように構成できる．ここで $\mathbb{U}_n$ は $\xi_1, \ldots, \xi_n$ に基づく経験過程である．

(Csörgő and Révész, Komlós, Major and Tusnády)

Bahadur-Kiefer 表現

$F(x)$ が $x = F^{-1}(u)$ において 2 回連続微分可能で $f(F^{-1}(u)) > 0$ $(f = F')$ を満たすとき，

$$\mathbb{F}_n^{-1}(u) = F^{-1}(u) + \frac{u - \mathbb{F}_n(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))} + R_n(u),$$

ただし $R_n(u) = O(n^{-3/4}(\log n)^{3/4})$，a.s. $(n \to \infty)$ が成り立つ．

Kiefer **のより精緻な結果：**

$$\limsup_{n\to\infty} \pm \frac{n^{3/4} R_n(u)}{(\log\log n)^{3/4}} = \frac{2^{5/4}[u(1-u)]^{1/4}}{3^{3/4}}, \quad \text{a.s.}$$

$R_n^* \triangleq \sup_{0<u<1} f(F^{-1}(u))|R_n(u)|$ **に対して，**

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^{3/4} R_n^*}{(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}} = 2^{-1/4}, \quad \text{a.s.}$$

最後に（much more to learn)

- U 統計量と U 過程（de la Peña & Giné)
- パターン認識・分類
- ブートストラップ法
- 関数デルタ法
- 生存解析

$\cdots$