

A

総合研究大学院大学先端学術院統計科学コース
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2026年8月4日(火) 10:00~12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 問題は第1問から第4問までである。
3. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること。
4. 答案用紙4枚が渡されるので、すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること。
5. 解答にあたっては、問題ごとに指定された答案用紙を使用すること。書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい。
6. 計算用紙3枚が渡されるので、所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること。
7. 答案用紙、計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号

第1問

n を 2 以上の整数とし, A を n 次実対称行列とする. このとき, A の固有値は実数で, 各固有値に対応する固有ベクトルは実ベクトルとしてとれることが知られている. いま, A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ はすべて異なり, $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ であるものとする. また, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対応する実固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ と表し, これらは正規化されている, すなわち $\|\mathbf{v}_1\| = \dots = \|\mathbf{v}_n\| = 1$ を満たすものとする. ここで, n 次元実ベクトル $\mathbf{x}$ の成分を $x_1, \dots, x_n$ とするとき,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

である. 以下では, $\mathbf{x}^\top$ は $\mathbf{x}$ の転置ベクトルを意味する.

[問 1] $i \neq j$ のとき $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = 0$ となることを示せ.

[問 2] $\|\mathbf{x}\| = 1$ の条件の下で $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ を最大にする $\mathbf{x}$ を 1 つ求めよ.

[問 3] [問 2] の解を $\mathbf{x}$ とおく. $\|\mathbf{y}\| = 1, \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$ の条件の下で $\mathbf{y}^\top A \mathbf{y}$ を最大にする $\mathbf{y}$ を 1 つ求めよ.

第2問

関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$ とし, 2 次実対称行列 A が

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たすとする. 以下では e を自然対数の底とし, 関数 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\exp(x) = e^x$ で定める.

[問 1] A を求め, $A = P\Lambda P^\top$ を満たす対角行列 Λ と直交行列 P を 1 組求めよ. ここで $P^\top$ は P の転置行列を表す.

[問 2] 次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\exp(\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} r dr$$

[問 3] $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 - f(x, y) \geq 0\}$ とし, 次の積分の値を求めよ.

$$I_2 = \iint_D \frac{\exp(\sqrt{1-f(x, y)})}{\sqrt{1-f(x, y)}} dx dy$$

第3問

n を2以上の整数とする. $X_1, \dots, X_n$ は独立で, いずれも標準ガンベル分布に従う確率変数であるとする. ただし, 標準ガンベル分布の累積分布関数は

$$F(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty$$

である. ここで, e は自然対数の底であり, 関数 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\exp(x) = e^x$ で定める.

[問1] 標準ガンベル分布の確率密度関数を導出せよ.

[問2] 確率変数

$$Y = X_2 - X_1$$

の累積分布関数を求めよ.

[問3] 実数 θ に対して

$$G(\theta) = \mathbb{P}(\theta + X_1 > X_2)$$

とおく.

$$\log \frac{G(\theta)}{1 - G(\theta)}$$

を求めよ.

[問4] 実数 $\theta_1, \dots, \theta_n$ に対して

$$Z_i = \theta_i + X_i, \quad i = 1, \dots, n$$

とおく.

$$\mathbb{P} \left(Z_1 > \max_{2 \leq i \leq n} Z_i \right)$$

を求めよ.

第4問

n を2以上の整数とする. $X_1, \dots, X_n$ は独立で, いずれも平均 λ のポアソン分布に従う確率変数であるとする. ただし, ポアソン分布の確率関数は

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

であり, $\lambda > 0$ は未知である. ここで, e は自然対数の底である.

本問では

$$\theta = e^{-\lambda}$$

を推定することを考える. また,

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

とおく.

[問1] 確率変数 S の従う確率分布を求めよ. また, 非負整数 $x_1, \dots, x_n$ が

$$x_1 + \dots + x_n = s$$

を満たすとき, $S = s$ が与えられたときの事象 $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ の条件付き確率

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid S = s)$$

を求めよ.

[問2]

$$Y_i = \begin{cases} 1 & (X_i = 0), \\ 0 & (X_i \neq 0), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

とおき,

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

とする. T は θ の不偏推定量であることを示せ. また, T の分散 $\text{Var}(T)$ を求めよ.

[問3] $s = 0, 1, 2, \dots$ に対し, $S = s$ が与えられたときの T の条件付き期待値

$$\mathbb{E}[T \mid S = s]$$

を求めよ.