$\boxed{\text{A}}$

総合研究大学院大学先端学術院統計科学コース
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2025年8月5日(火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{A}}$

第1問

次の確率密度関数を考える．

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

[問 1] 1次元標準正規分布に独立に従う2つの確率変数 U と V を考える．U/V の従う確率分布の確率密度関数は $f(x)$ であることを示せ．ただし，1次元標準正規分布の確率密度関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

である．

[問 2] $\mathbb{C}$ で複素数全体の集合を表し，多項式

$$p(z) = z^2 - 2az + 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

を考える．a が確率密度関数 $f(x)$ をもつ確率分布に従う実数値確率変数であるとき，方程式 $p(z) = 0$ が実数解をもつ確率を求めよ．

[問 3] 方程式 $p(z) = 0$ が実数解をもたないとき，2つの複素数解はともに複素数平面の単位円 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上で，実軸について互いに対称な位置にあることを示せ．

[問 4] 方程式 $p(z) = 0$ について，虚部が $\sqrt{2/3}$ 以上の解をもつ確率を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

第 2 問

n を正の整数とする. n 次実対称行列 A が正定値であるとは, 任意の $\mathbf{0}$ でない n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} > 0$ が成り立つことをいう. ここで $\boldsymbol{x}^\top$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す. いま, n 次実対称行列 A が正定値であるものとする.

[**問 1**] A のすべての固有値が実数かつ正であることと, A の逆行列 A^{-1} が存在することを示せ.

以下では, A の固有値のうち最大のものと最小のものをそれぞれ M と m で表す. また, $B = A + MmA^{-1}$ とする.

[**問 2**] 任意の $\mathbf{0}$ でない n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ について次の不等式が成り立つことを示せ.

$$m \leq \frac{\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}} \leq M$$

[**問 3**] B のすべての固有値は $2\sqrt{Mm}$ 以上 $M+m$ 以下であることを示せ.

[**問 4**] 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ について次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x})(Mm\boldsymbol{x}^\top A^{-1}\boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{4}(M+m)^2(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x})^2$$

[**問 5**] 任意の $\mathbf{0}$ でない n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ について次の不等式が成り立つことを示せ.

$$1 \leq \frac{(\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^\top A^{-1}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x})^2} \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

第3問

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき, 実数 x^* が f の最小解であるとは, 任意の実数 x に対して $f(x^*)\le f(x)$ となることをいう. いま, 関数 f の 1 階の導関数 f' と 2 階の導関数 f'' が存在し, これらが連続であるものとする. さらに, ある定数 $\mu>0$ が存在して, 任意の実数 x に対して, $f''(x)\ge\mu$ が成り立つことも仮定する.

[**問 1**] x^* が f の最小解であることの必要十分条件が $f'(x^*)=0$ であることを示せ.

[**問 2**] f がただ 1 つの最小解をもつことを示せ.

以下では, f の最小解 x^* を求める解法として, 適当な実数 x_0 を初期点とし, 漸化式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\qquad(k=0,1,\dots)$$

に従って点列 $\{x_k\}$ を生成するものを考える.

[**問 3**] 初期点 x_0 の選び方によらず, 任意の非負整数 k について次が成り立つことを示せ.

$$x_{k+1}-x^*=\frac{1}{f''(x_k)}\int_0^1\{f''(x_k+t(x^*-x_k))-f''(x_k)\}(x^*-x_k)dt$$

以下では, ある定数 $L>0$ が存在して, 任意の実数 x,y に対して,

$$|f''(x)-f''(y)|\le L|x-y|$$

が成り立つことも仮定する.

[**問 4**] 初期点 x_0 の選び方によらず, 任意の非負整数 k について次が成り立つことを示せ.

$$|x_{k+1}-x^*|\le\frac{L}{2\mu}|x_k-x^*|^2$$

[**問 5**] 初期点 x_0 を

$$|x_0-x^*|\le\frac{\mu}{L}$$

が成り立つように選ぶ. このとき, 任意の非負整数 k について次が成り立つことを示せ.

$$|x_k - x^*| \leq \frac{2\mu}{L}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}$$

第4問

p, n, K を正の整数とし，$1 \leq p \leq n$ とする．単位行列を I と書く．(n,p) 型実行列 X，p 次元実ベクトル β および n 次元確率ベクトル ϵ に対して n 次元確率ベクトル $\mathbf{Y}$ を

$$\mathbf{Y} = X\beta + \epsilon$$

とする．ただし，ϵ の平均ベクトルを $\mathbf{0}$，分散共分散行列を I とする．また，$\lambda > 0$ とし，p 次元実ベクトル $\mathbf{b}$ に対し，関数 $S(\mathbf{b})$ を

$$S(\mathbf{b}) = \|\mathbf{Y} - X\mathbf{b}\|^2 + \lambda\|\mathbf{b}\|^2$$

と定める．ただし，K 次元実ベクトル $\mathbf{x}$ の第 k 成分を x_k とするとき，ノルム $\|\mathbf{x}\|$ は

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} x_k^2}$$

で定義されるものとする．いま，X を与えられた定数行列とし，p 次元のユークリッド空間全体をパラメータ空間としてパラメータ β の推定問題を考える．

[問 1] $S(\mathbf{b})$ を最小にする $\mathbf{b}$ を β_λ と書く．確率ベクトル β_λ を $\mathbf{Y}, X, \lambda$ および I で表し，確率ベクトル β_λ の分散共分散行列を求めよ．

[問 2] 確率ベクトル β_λ は β の不偏推定量となるか．なるなら λ に対する条件を示し，ならないならそのことを証明せよ．

[問 3] $X^\top X = aI$ となる正の実数 a が存在するとする．ここで，$X^\top$ は X の転置を表す．このとき，任意の β に対し，β_λ の平均二乗誤差 $\mathbb{E}[\|\beta_\lambda - \beta\|^2]$ が最小二乗推定量 $\beta_0 = (X^\top X)^{-1}X^\top\mathbf{Y}$ の平均二乗誤差 $\mathbb{E}[\|\beta_0 - \beta\|^2]$ より小さくなるような正の実数 λ が存在することを示せ．ただし，$\mathbb{E}$ は期待値を表す．