A

総合研究大学院大学先端学術院統計科学コース
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2024年8月6日(火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

A

第1問

d を 2 以上の整数とする．2 つの d 次元実ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^\top, \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d)^\top$ に対して，以下のように演算子 $*$ を定義する．

$$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = x_1 y_1 - \sum_{i=2}^{d} x_i y_i.$$

また，A は $A^\top J A = J$ を満たす d 次実正方行列である．ただし，J は $(1,1)$ 成分が 1, その他の対角成分が -1 となる d 次対角行列を表す．$B^\top$ はベクトルあるいは行列 B の転置を表す．

このとき，以下の問に答えよ．

[問 1]　$(A\boldsymbol{x}) * (A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}$ が成り立つことを示せ．

[問 2]　A の第 i 列を $\boldsymbol{a}_i$ と表す $(1 \leq i \leq d)$．このとき，

$$\boldsymbol{a}_i * \boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 1, & i = j = 1, \\ -1, & i = j \geq 2, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

が成立することを示せ．

[問 3]　$H_d = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d : x_1 \geq 1,\ \boldsymbol{x} * \boldsymbol{x} = 1\}$ とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H_d$ に対して，$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} \geq 1$ が成り立つことを示せ．

[問 4]　A の $(1,1)$ 成分を 1 以上の実数とする．このとき，問 3 で定義された H_d について，$\boldsymbol{x} \in H_d$ であれば，$A\boldsymbol{x} \in H_d$ となることを証明せよ．

第2問

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

と定義する．また，関数 $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$S(x)=\frac{1}{1+\exp(-x)}$$

と定義する．実数 a に対して関数 $S_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $S_a(x)=S(ax)$ と定義する．

[問 **1**]　各 $x\in\mathbb{R}$ について $\lim_{a\to\infty}S_a(x)$ の値を求めよ．

[問 **2**]　関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して

$$\|g\|=\int_{-1}^{1}|g(x)|\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

と定義すると，$\lim_{a\to\infty}\|f-S_a\|=0$ であることを示せ．

[問 **3**]　関数 $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0\leq x\leq \dfrac{1}{2},\\ 0, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

と定義する．任意の $\varepsilon>0$ に対してあるパラメータの組 $(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2)\in\mathbb{R}^6$ が存在して

$$\|\tilde{f}-(c_1S_{a_1,b_1}+c_2S_{a_2,b_2})\|<\varepsilon$$

とできることを示せ．ただし，ここで実数 a および実数 b に対して $S_{a,b}(\cdot)$ は $S_{a,b}(x)=S_a(x-b)$ で定義されるとする．

第3問

$0000, 0001, \ldots, 9999$ までの各桁が独立に 0 から 9 の一様分布に従う 4 桁の数値を考える．左から，各桁は確率変数 $X_1, \ldots, X_4$ の実現値であるとする．

[問 1]　X_1 の確率母関数を求めよ．ただし，確率変数 X の確率母関数は

$$G_X(s) = \mathbb{E}_X[s^X], \quad s \geq 0$$

で定義される．ここで，関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{E}_X[h(X)]$ は X の従う確率分布に関する $h(X)$ の期待値を表す．

[問 2]　確率変数 $X_1 + X_2$ の確率母関数 $G_{12}(s)$ 及び $X_1 + X_2 - X_3 - X_4$ の確率母関数 $G_{12/34}(s)$ を求めよ．

[問 3]　$0000, 0001, \ldots, 9999$ の最初の 2 桁の和が最後の 2 桁の和と等しくなる確率を求めよ．

第4問

n を2以上の整数とする．$X_1, \dots, X_n$ を独立に同一の分布に従う確率変数とし，X_1 の確率密度関数を

$$p_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right), & x \geq a, \\ 0, & x < a \end{cases}$$

とする．ここで，$a \in \mathbb{R}$ と $b > 0$ は未知母数であり，$(a,\, b)$ を $X_1, \dots, X_n$ の実現値 $x_1, \dots, x_n$ から推定することを考える．

[問1]　$(a,\, b)$ の対数尤度関数を書け．

[問2]　$(a,\, b)$ の最尤推定値 $(\hat{a}(x_1, \dots, x_n),\, \hat{b}(x_1, \dots, x_n))$ を求めよ．

[問3]　$X_1, \dots, X_n$ を昇順に並べた $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ について，$(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$ の同時分布及び $(X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)})$ の同時分布を求めよ．

[問4]　$(a,\, b)$ の最尤推定量 $(\hat{a}(X_1, \dots, X_n),\, \hat{b}(X_1, \dots, X_n))$ の同時分布を求めよ．ここで，独立に平均 $\theta > 0$ をもつ指数分布に従う n 個の確率変数 $Z_1, \dots, Z_n$ についてその和 $Z_1 + \cdots + Z_n$ の分布は形状母数 n と尺度母数 θ をもつガンマ分布 (アーラン分布) に従うことを用いて良い．平均 $\theta > 0$ をもつ指数分布の確率密度関数は

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

であり，形状母数 n と尺度母数 θ をもつガンマ分布の確率密度関数は

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!\,\theta^n} x^{n-1} \exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

である．

このページは意図的に白紙としている.