A

# 総合研究大学院大学先端学術院統計科学コース
# 5年一貫制博士課程入学試験問題

## 科目 数理

2023年8月8日(火) 10:00～12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{A}}$

## 第 1 問

$p$ を 1 以上の自然数とする．$p$ 次実正方行列 $A$ の指数関数を

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

と定義する．$p$ 次実正方行列 $A$ に対して行列の作用素ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ を

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^p} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

と定義する．ここで，$p$ 次実ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$$

に対して $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p v_i^2}$ である．また，$p$ 次実正方行列 $A$ に対してトレース $\mathrm{tr}A$ を $A$ の対角成分 $A_{ii}$，$i = 1, 2, \ldots, p$ を用いて $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^p A_{ii}$ と定義する．

**[問 1]**　$p$ 次実対称行列 $A$ が $p$ 次対角行列 $D$ と $p$ 次正則行列 $P$ を用いて $A = PDP^{-1}$ と対角化できるとする．このとき，以下を示せ．

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}.$$

**[問 2]**　$p$ 次正定値実対称行列 $A$ と $t > 0$ に対して

$$\frac{\mathrm{tr}\exp(tA)}{p} \leq \exp(t\|A\|_{\mathrm{op}})$$

が成立することを示し，

$$0 \leq \frac{\log\{\mathrm{tr}\exp(tA)\}}{t} - \|A\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{\log p}{t}$$

が成立することを示せ．ただし，$p$ 次正定値実対称行列 $A$ に対し，$\|A\|_{\mathrm{op}}$ は $A$ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ を用いて $\|A\|_{\mathrm{op}} = \lambda_{\max}$ と書けることを用いて良い．

**[問 3]**　$p$ 次正定値実対称行列 $A$ と $t > 0$ に対して

$$0 \leq \frac{\log\{\mathrm{tr}\exp(tA)/p\}}{t} - \frac{\mathrm{tr}(A)}{p} \leq \frac{\exp(t\|A\|_{\mathrm{op}}) - 1 - t\|A\|_{\mathrm{op}}}{t}$$

が成立することを示せ．

第2問

$I$ を実区間 $[0,1]$ とする．$I$ 上の実数値関数 $f(x)$ を考える．$I$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が凸関数であるとは，任意の 2 点 $p, q \in I$ と $0 < \lambda < 1$ に対して

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) \leq \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$$

が成り立つことである．

**[問 1]**　任意の 3 点 $a, b, c \in I$ $(a < b < c)$ に対して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

が成り立つならば，$f(x)$ は凸関数であることを示せ．

**[問 2]**　実数値関数 $f(x)$ を凸関数とすると，任意の 3 点 $a, b, c \in I$ $(a < b < c)$ に対して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

が成り立つことを示せ．

**[問 3]**　$I$ 上の実数値凸関数は $I$ の任意の点 $b \in (0,1)$ において連続であることを示せ．

$\boxed{\text{第 3 問}}$

$X$ を正の整数に値をとる確率変数とする．$F$ と $f$ をそれぞれ $X$ の累積分布関数と確率関数とする．ただし，累積分布関数 $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ は $F(x) = \Pr(X \leq x)$ で定義される．また，関数 $G$ を

$$G(x) = F(x) - \frac{f(x)}{2}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

**[問 1]**　次の式が成り立つことを示せ．

$$\{F(x)\}^2 - \{F(x-1)\}^2 = 2f(x)G(x), \quad x = 1, 2, \ldots.$$

**[問 2]**　$G(X)$ の期待値 $\mathbb{E}[G(X)]$ を求めよ．

**[問 3]**　$G(X)$ の分散 $\mathrm{Var}[G(X)]$ が，

$$\mathrm{Var}[G(X)] = \frac{1 - \mathbb{E}[\{f(X)\}^2]}{12}$$

と表せることを示せ．

**[問 4]**　連続型確率変数とは，連続な累積分布関数を持つ確率変数のことをいう．いま，実数に値をとる連続型確率変数 $Y$ が，狭義単調増加の累積分布関数 $H$ を持つとする．このとき，$H(Y)$ の分散と $G(X)$ の分散の大小関係を議論せよ．

$\boxed{\text{第 4 問}}$

1 以上の自然数 $n$ に対し，$n \times 3$ の行列 $X^{(n)} = (X_{ij}^{(n)})_{i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,3}$ が

$$
\begin{aligned}
X_{i1}^{(n)} &= 1, && i = 1,2,\ldots,n,\\
X_{i2}^{(n)} &= \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{n}\right), && i = 1,2,\ldots,n,\\
X_{i3}^{(n)} &= \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{n}\right), && i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

で与えられるとする．以下では，行列 $X^{(n)}$ の転置行列を $(X^{(n)})^\top$ と表すこととする．

**[問 1]** $n = 1,2$ について $(X^{(n)})^\top X^{(n)}$ を求めよ．

**[問 2]** $n = 3,4,\ldots$ について $(X^{(n)})^\top X^{(n)}$ を求めよ．ここで，オイラーの公式

$$
e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos(\theta) + \sqrt{-1}\sin(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}
$$

を用いても良い．ただし，$\sqrt{-1}$ は虚数単位である．

**[問 3]** $n$ を 1 以上の自然数とする．$n$ 次元実ベクトル $\boldsymbol{Y}^{(n)}$ が

$$
\boldsymbol{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)} \\ Y_2^{(n)} \\ \vdots \\ Y_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi(1-1)}{n}\right) \\ 1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi(2-1)}{n}\right) \\ \vdots \\ 1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}\right) \end{pmatrix}
$$

と与えられるとする．$\boldsymbol{Y}^{(n)}$ に対し，

$$
Y_i^{(n)} = X_{i1}^{(n)}\beta_1 + X_{i2}^{(n)}\beta_2 + X_{i3}^{(n)}\beta_3, \quad i = 1,2,\ldots,n
$$

を満たす

$$
\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

の集合を $\mathcal{B}^{(n)}$ と書く．このとき，$n = 1$ の場合，$n = 2$ の場合，$n = 3,4,\ldots$ の場合の 3 通りの場合分けを行い，$\mathcal{B}^{(n)}$ の要素がただ 1 つであるかを答えよ．また，$\mathcal{B}^{(n)}$ の要素がただ 1 つに定まらない場合について，$\mathcal{B}^{(n)}$ の任意の要素を $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ を使って表示せよ．