A

総合研究大学院大学先端学術院先端学術専攻統計科学コース
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2023年1月17日(火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙4枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\mathrm{A}}$

第1問

n を正の整数とし，A を n 次実正方行列とする．$A^\top$ で A の転置行列を表し，$\mathrm{tr}(A)$ で A の対角成分の和を表すとする．なお，A, B が n 次実正方行列のとき，$(AB)^\top = B^\top A^\top$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つことを用いても良い．

[問 1]　$\mathrm{tr}(AA^\top) = 0$ ならば A の各成分は 0 であることを示せ．

[問 2]　$AA^\top = A^2$ ならば $AA^\top = (A^\top)^2$ であることを示せ．

[問 3]　$AA^\top = A^2$ であることと $A = A^\top$ であることは同値であることを示せ．

$\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\text{第 2 問}}$

[問 1]　次の式が $-1 < x < 1$ なる任意の実数 x について成り立つ実数 $\alpha,\ \beta$ を求めよ．

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}.$$

[問 2]　次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}.$$

[問 3]　次の定積分の値を求めよ．**[問 2]** を利用すると良い．

$$\iint_D \exp\left(-\frac{3x^2 - y^2}{2}\right) dxdy.$$

ただし，積分範囲 D は次のように定める．

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}.$$

ここで $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す．

第3問

m, n を正の整数とする．n 次正方行列 A が対角化可能であるとは，ある n 次正則行列 P が存在し，$P^{-1}AP$ が対角行列になることをいう．また，n 次正方行列 A, B が同時対角化可能であるとは，ある n 次正則行列 Q が存在し，$Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ がともに対角行列になることをいう．以下では n 次単位行列を I_n, すべての成分が 0 の (m, n) 型の行列を $O_{m,n}$ で表す．なお，答案では行列のサイズを省略してこれらを I, O と表記してもよい．

[問 1]　n 次正方行列 A, B が同時対角化可能であるとき，$AB = BA$ が成り立つことを示せ．

[問 2]　λ, μ を相異なる実数とし，次の対角行列 D を考える．

$$D = \begin{pmatrix} \lambda I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & \mu I_n \end{pmatrix}.$$

また，次の正方行列 C を考える．

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

ここで，C_{11} は m 次正方行列，C_{22} は n 次正方行列とする．C_{12} は (m, n) 型，C_{21} は (n, m) 型の行列とする．このとき，$CD = DC$ となるための必要十分条件が，$C_{12} = O_{m,n}$, $C_{21} = O_{n,m}$ であることを示せ．

[問 3]　次の正方行列 C を考える．

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & O_{m,n} \\ O_{n,m} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

ここで，C_{11} は m 次正方行列，C_{22} は n 次正方行列とする．このとき，C が対角化可能であるための必要十分条件が，C_{11} と C_{22} がそれぞれ対角化可能であることを示せ．

[問 4]　対角化可能な $(m+n)$ 次正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たし，A が $(m+n)$ 次正則行列 P と相異なる実数 λ, μ を用いて

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & \mu I_n \end{pmatrix}$$

と対角化されるとき，A, B が同時対角化可能であることを示せ.

A

第4問

確率変数 X は期待値1の指数分布に，確率変数 Y は標準正規分布に従うとする．次の設問に答えよ．ただし，任意の実数 t に対し

$$\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}\,tY)] = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

が成り立つことを用いてもよい．ここで，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ は虚数単位，$\mathbb{E}[Z]$ は確率変数 Z の期待値を表す．また，答案は実数 z に対して定まる関数

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

を用いて表記してもよい．

[問 1]　実数 y について次の I, J を求めよ．

$$I = \mathbb{E}[\cos(Xy)], \quad J = \mathbb{E}[\sin(Xy)].$$

[問 2]　実数 x について次の K, L を求めよ．

$$K = \mathbb{E}[\cos(xY)], \quad L = \mathbb{E}[\sin(xY)].$$

[問 3]　次の M を求めよ．

$$M = \mathbb{E}\left[\frac{Y^2}{1+Y^2}\right].$$