A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
博士課程（5年一貫制）入学試験問題

科目 数理

2021年8月17日(火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問までである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙4枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{A}}$

第1問

[問 1]　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

[問 2]　3次正方行列 A，B を次のように定める．

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

また，逆行列を持つ3次正方行列 S と A，B の間には，$B=S^{-1}AS$ という関係が成り立つとする．ここで，S の各要素を以下のように表す．

$$S=\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{pmatrix}$$

このとき，s_{ij} $(i,j=1,2,3)$ が満たす条件を求めよ．

[問 3]　確率変数 a,b,c は閉区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする．a,b,c はそれぞれ独立であるとき，方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ確率を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

$\boxed{第2問}$

半開区間 $[0,\infty)$ で定義される t の関数 $f(t)$ の積分

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (s > 0)$$

が有界のとき, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ を関数 $f(t)$ のラプラス変換という.

[問 1] $\mathcal{L}[e^{-at}](s)$ を求めよ．ただし，a は非負の実数とする．

[問 2] $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)](s) = F(s+a)$ が成立することを示せ．ただし，a は非負の実数とする．

[問 3] 数学的帰納法により $\mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0, n = 0, 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{A}}$

$\boxed{第3問}$

n 個の確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布にしたがうとする．ここで，n 個の確率変数を要素に持つベクトルを $\boldsymbol{x} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ と表す．記号 $\boldsymbol{v}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を表す．このとき，次の問いに答えよ．

[**問 1**]　B を $m \times n$ の行列，A を n 次対称行列とする．$BA = O$ のとき，二つの確率変数 $B\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$ が独立になることを示せ．ここで，O は全ての要素が 0 の行列を表す．

[**問 2**]　標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ と標本分散 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ が独立であることを示せ．ここで，問 1 の結果を用いてもよい．

$\boxed{\mathrm{A}}$

第4問

[**問1**]　I_d, O_d をそれぞれ d 次単位行列，d 次零行列として，L を任意の d 次正方行列，R は $I_d - R$ の逆行列が存在するような任意の d 次正方行列とする．行列 M を

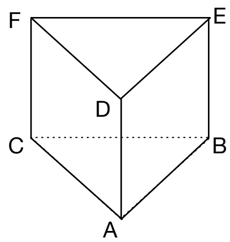
$$M = \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ L & R \end{pmatrix}$$

で定義するとき，任意の自然数 n に対して

$$M^n = \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ (I_d - R^n)(I_d - R)^{-1}L & R^n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

[**問2**]



上図の三角柱の頂点を移動する一匹の蟻を考える．頂点 D, E, F のいずれかから等確率でスタートして，三角柱の頂点を移動し，頂点 A,B,C のいずれかに達したら，そこから他の頂点には移動しないものとする．蟻が頂点 D にいるときに，次の時刻に頂点 A, B, C, D, E, F に移動する確率はそれぞれ $(2/5, 0, 0, 2/5, 0, 1/5)$，蟻が頂点 E にいるときに，次の時刻に頂点 A, B, C, D, E, F に移動する確率はそれぞれ $(0, 2/5, 0, 0, 2/5, 1/5)$，蟻が頂点 F にいるときに，次の時刻に頂点 A, B, C, D, E, F に移動する確率はそれぞれ $(0, 0, 3/5, 1/5, 1/5, 0)$ であるとする．

　移動開始からの経過時刻を n として，$n \to \infty$ の極限において，頂点 A にいる蟻が頂点 D からスタートした確率を求めよ．必要ならば，以下のゲルシュゴリンの定理を用いよ：

実対称行列に対するゲルシュゴリンの定理

n 次実対称行列 $M=(M_{ij})_{i,j=1}^n$ の i 行目の対角要素 M_{ii} 以外の絶対値の和を M_i とする．

$$M_i = \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} |M_{ik}|$$

また，領域

$$D_i = \{z \in \mathbb{R} : |z - M_{ii}| \leq M_i\}$$

を用意する（$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す）．このとき，M の任意の固有値は D_i $(i=1,\dots,n)$ のいずれかの内部に存在する．

このページは意図的に白紙としている．