A

# 総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
# 博士課程（5年一貫制）入学試験問題

## 科目 数理

2021年1月19日 (火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙4枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

A

## 第1問

**[問 1]**　行列 $A$ およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定義するとき，3 つの 3 次元縦ベクトル $\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}, A^2\boldsymbol{b}$ を並べた $3 \times 3$ 行列 $(\boldsymbol{b}\ A\boldsymbol{b}\ A^2\boldsymbol{b})$ のランクを求めよ．

**[問 2]**

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$ を $x$ について微分せよ．

**[問 3]**　等式制約 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ のもとで，$||\boldsymbol{x}||^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}$ はそれぞれ長さ $n, m$ の縦ベクトルを表し，$||\boldsymbol{x}||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$（$x_i$ は $\boldsymbol{x}$ の第 $i$ 要素）である．$m \times n$ 行列 $C$ のランクは $m$ とする（$m \leq n$）．

$\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\text{第2問}}$

次の重積分を考える．

$$I = \iint_D e^{x+y} \sin^2(x-2y)\,dxdy.$$

ただし，積分領域は $D = \{(x,y) | \pi \leq x - 2y \leq 3\pi, 0 \leq x + y \leq \pi\}$ とする．

**[問 1]**　以下の変数変換において，$dxdy = |J|\,dudv$ を満たすヤコビ行列式 $J$ の絶対値 $|J|$ を求めよ．

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**[問 2]**　**[問 1]** の変数変換において，$xy$ 平面と $uv$ 平面での積分領域をそれぞれ図示せよ．

**[問 3]**　**[問 1]** と **[問 2]** の結果を用いて積分 $I$ の値を求めよ．

A

## 第3問

2つの状態 $\{1,2\}$ を推移するマルコフ連鎖を考える．時点 $n$ で状態 $1$ にあるとき，時点 $n+1$ で状態 $1$ にとどまる確率を $p$，状態 $2$ に推移する確率を $1-p$ とする $(n=0,1,2,\ldots)$．また，状態 $2$ から状態 $1$ への推移確率も同じく $1-p$ とする（状態 $2$ にとどまる確率は $p$）．ここで，$p$ は時間に対して不変であり，さらに $0<p<1$ かつ $p \neq 1/2$ を仮定する．

ここで，時点 $n$ で状態 $1,2$ をとる確率を $x_n, 1-x_n$ とし，これらを縦ベクトル $\boldsymbol{x}_n = (x_n, 1-x_n)^\top$ で表す（$\boldsymbol{x}_n$ は確率ベクトル）．記号 $\top$ は転置を表す．また，$P$ を推移確率を要素に持つ $2\times 2$ の対称行列とする．なお，$P$ の各列の要素の和は $1$ となる．このとき，任意の時点において $\boldsymbol{x}_{n+1}$ と $\boldsymbol{x}_n$ の間に $\boldsymbol{x}_{n+1} = P\boldsymbol{x}_n$ が成り立つ．このマルコフ連鎖について，以下の問いに答えよ．

**[問 1]**　$p$ を用いて推移確率行列 $P$ の要素を書き下せ．

**[問 2]**　初期状態の確率ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}_n$ の間に $\boldsymbol{x}_n = P^n\boldsymbol{x}_0$ という関係が成り立つ．このことを用いて，$\boldsymbol{x}_\infty = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ を求めよ．

**[問 3]**　任意の $n$ に対し，$||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_\infty||^2 \leq \frac{1}{2}|2p-1|^{2n}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathrm{A}}$

# 第4問

**[問 1]**　関数 $g(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{dg(t)}{dt} = a(1 - g(t))$$

の一般解を求めよ．ただし $a$ は正数である．

**[問 2]**　非負値をとる連続型確率変数 $X$ を考える．$x, y \geq 0$ に対して

$$\Pr(X > x + y | X > x) = \Pr(X > y)$$

が成り立つならば，$X$ が従う分布が正数 $a$ をパラメタとする指数分布

$$f(x; a) = ae^{-ax}$$

となることを示せ．

**[問 3]**　確率変数 $X_1, X_2, X_3$ が互いに独立に同一の指数分布に従うとき，確率変数

$$U = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

と

$$V = \max\{X_1, X_2, X_3\}$$

が同じ分布に従うことを示せ．