A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2020年1月21日(火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問までである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

A

第1問

[問1]　次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[問2]　以下の問に答えよ. ただし, E は期待値とする.

(1) 確率変数列 $\{X_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n^2) = 0$ を満たすならば, 任意の正の定数 ϵ に対して $\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n| > \epsilon) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) 任意の正の定数 ϵ に対して $\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n| > \epsilon) = 0$ であっても $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n^2) = 0$ とならないような確率変数列 $\{Y_n\}$ の例を挙げよ. そして, その例が任意の正の定数 ϵ に対して $\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n| > \epsilon) = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n^2) = 0$ を満たすことを示せ.

A

第2問

次の定積分を求めよ.

[問 1]

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

[問 2]

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

A

第3問

区分行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$ を考える．$\mathbf{A}_{11}$，$\mathbf{A}_{22}$，$\mathbf{B}_{11}$，$\mathbf{B}_{22}$ は $n \times n$ 正方行列とする．以下に現れる全ての逆行列は存在すると仮定する．$\mathbf{O}$ は $n \times n$ 零行列，$\mathbf{I}$ は $n \times n$ 単位行列とする．

[問 1]　次を満たす $n \times n$ 行列 $\mathbf{Q}_1$ を $\mathbf{A}_{11}$，$\mathbf{A}_{12}$，$\mathbf{A}_{21}$，$\mathbf{A}_{22}$ とその逆行列から必要なものを用いて表せ.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

[問 2]　次を満たす $n \times n$ 行列 $\mathbf{Q}_3$ を $\mathbf{B}_{11}$，$\mathbf{B}_{21}$，$\mathbf{B}_{22}$ とその逆行列から必要なものを用いて表せ.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{B}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

[問 3]　$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} \\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} \end{pmatrix}$ とする．$\mathbf{A}^{11}$，$\mathbf{A}^{22}$ は $n \times n$ 正方行列とする．$\mathbf{A}^{11}$，$\mathbf{A}^{12}$，$\mathbf{A}^{21}$，$\mathbf{A}^{22}$ を $\mathbf{A}_{11}$，$\mathbf{A}_{12}$，$\mathbf{A}_{21}$，$\mathbf{A}_{22}$ とその逆行列から必要なものを用いて表せ.

[問 4]　次の等式を示せ.

$$(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} = \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}$$

A

第 4 問

狭義単調かつ連続な確率分布関数 $F(x)$ をもつ三つの独立な確率変数 X_1, X_2, X_3 を小さい順に並べたものを $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ $(X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)})$，標準指数分布にしたがう三つの独立な確率変数 E_1, E_2, E_3 を小さい順に並べたものを $E_{(1)}, E_{(2)}, E_{(3)}$ $(E_{(1)} \leq E_{(2)} \leq E_{(3)})$ とする．ここで，標準指数分布は確率密度関数 e^{-x} $(x \geq 0)$ をもつ分布であり，e は自然対数の底である．

[問 1]　$F(x)$ の逆関数を $F^{-1}(t)$ と表すことにする．$(F^{-1}(e^{-E_{(1)}}), F^{-1}(e^{-E_{(2)}}), F^{-1}(e^{-E_{(3)}}))$ の分布は $(X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$ の分布に一致することを示せ．

[問 2]　$(E_{(1)}, E_{(2)}, E_{(3)})$ の同時確率密度関数を求めよ．

[問 3]　$3E_{(1)}, 2(E_{(2)} - E_{(1)}), E_{(3)} - E_{(2)}$ は独立に標準指数分布にしたがうことを示せ．

[問 4]　$\log\log\{1/F(X_{(2)})\} - \log\log\{1/F(X_{(3)})\}$ の確率密度関数を求めよ．

このページは意図的に白紙としている.