A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2019年8月20日 (火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ____________________

A

第1問

[問1]　以下の行列 M の逆行列を計算せよ．

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[問2]　次の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{x^2+2x+5} dx.$$

[問3]　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda$, および $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^3\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda$ が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底である．

[問4]　d 次元確率ベクトル $\boldsymbol{x}$ の平均ベクトルが $\mathbf{0}_d$，分散共分散行列が I_d となるとき，ある d 次正方行列 A に対する $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ の期待値 $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置，$\mathbf{0}_d$ は全要素が 0 の d 次元ベクトル，I_d は d 次単位行列である．

第2問

以下の問では，d を 3 以上の整数，I_d を d 次単位行列とする．

[問 1]　行列 A を

$$A = I_d - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1^T - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2^T$$

と定義する．ただし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\ (\in \mathbb{R}^d)$ は互いに直交する単位列ベクトル，また，$\boldsymbol{a}^T$ は $\boldsymbol{a}$ を転置したベクトルである．このとき，次の問に答えよ．

(1) $A^2 = A$ となることを示せ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

[問 2]　B を d 次正方行列とする．このとき，B の階数と $I_d - B$ の階数の和が d であるならば，$B^2 = B$ となることを証明せよ．

第3問

[問1] 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

と，$t = t_0$ における x の値 $x(t_0)$ が与えられたとき，微小な Δt に対する $x(t_0 + \Delta t)$ の近似式を

$$\hat{x}(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + w_1 \Delta t\, f(t_0, x_0) + w_2 \Delta t\, f(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)$$

$$\text{ただし}\quad \Delta x = \Delta t f(t_0, x_0)$$

の形で構成することを考える．

$\hat{x}(t_0 + \Delta t)$ による近似が，元の $x(t_0 + \Delta t)$ を t_0 の周りでのテイラー展開したときの2次の項まで一致するように，w_1, w_2 を求めよ．

[問2] 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -2(t+1)x - 2t^2 + 1$$

の解のうち，$x = \alpha t + \beta$ の形のものを求めよ．

[問3] 問2の微分方程式の一般解を求めよ．

[問4] 問2の微分方程式において，$t = 0$ のときに $x = 0$ とする．$t = 0.1$ のときの x の値を，問1で得た近似式で小数第2位まで求めよ．

第4問

確率変数 X と Y が，それぞれ独立に以下の確率密度関数を持つ分布に従っているものとする．

$$f(s) = e^{-s} \ (s \geq 0).$$

[問1]　X と Y から $Z = \sqrt{Y/X}$ と定義するとき，Z の確率密度関数を求めよ．

[問2]　Z の期待値 $\mathrm{E}(Z)$ を求めよ．

このページは意図的に白紙としている．