A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2019年1月22日 (火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

A

第1問

[問1]　以下の行列 A に対して，A^5 を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

[問2]　次の関数を $x=0$ の周りに2次までマクローリン展開せよ．

$$f(x) = \log(3+4x).$$

ここで log は自然対数関数を表す．

[問3]　次の定積分の値を求めよ．

(1)

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx,$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$$

[問4]　ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ がベクトル空間 V の基底になっているとする．

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \qquad \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$$

のように $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in V$ を定義し，$\boldsymbol{a} \in V$ を

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$$

とする．$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ の線形結合

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \alpha_3\boldsymbol{u}_3$$

で表したときの $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の値を求めよ．ただし，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は実数とする．

$\boxed{\mathrm{A}}$

第2問

N を自然数，a を実数とし，A_N を

$$A_N = \begin{pmatrix} 1-a & -a & \cdots & -a \\ -a & 1-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a \\ -a & \cdots & -a & 1-a \end{pmatrix}$$

のように対角成分がすべて $1-a$，非対角成分がすべて $-a$ となる N 次の正方行列とする．

[問 1]　$N=5$ の場合の A_N を A_5 と表記する．T_5 を

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義したとき，T_5 と A_5 の積 $T_5 A_5$ を求めよ．

[問 2]　A_5 の行列式の値を求めよ．また，一般の N に対する A_N の行列式の値を求めよ．

[問 3]　行列 A_N が 0 を固有値として持つとするとき，a の値を求めよ．また，このとき，0 固有値に属する固有ベクトル $\boldsymbol{z}$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{z}$ の長さは 1 とする．(すなわち $\boldsymbol{z}$ の i 番目の要素を z_i として $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_N^2} = 1$ とする．)

[問 4]　I_N を N 次の単位行列とする．行列 A_N が 0 を固有値として持つように a を与えたとき，問 3 で求めたベクトル $\boldsymbol{z}$ を用いて定義される次のベクトル $\boldsymbol{x}$ の値を求めよ．

$$\boldsymbol{x} = A_N (I_N + A_N^2)^{-1} \boldsymbol{z}.$$

実対称行列 A_N が，適当な直交行列 P と対角行列 Λ をとると $A_N = P\Lambda P^T$ の形に変形できることは証明なしに用いてよい．ただし，P^T は P の転置行列とする．

第3問

[問1]

(1) 関数

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

について，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ なるすべての x に対して，$f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ が定数となることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$ の値を求めよ．

[問2]

(1) $\log(1 + x)$ を $x = 0$ の周りで3次までマクローリン展開することにより，

$$\frac{1}{x} \log(1 + x)$$

に対して，x の2次式までを使った近似式を与えよ．

(2) $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$ と変形できることを利用し，極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e(a + bx)}{x^2}$$

が存在するための実数 a, b の値と，そのときの極限値を求めよ．ただし，e はネイピア数（自然対数の底）である．

A

第4問

確率変数 X_1, X_2 が，それぞれ独立に以下の確率密度関数をもつ分布に従っているとする．

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (-\infty < x < \infty).$$

また，確率ベクトル (Y_1, Y_2) を

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

と定義する．ここで，$-1 < a < 1$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

ただし，解答にあたっては特にことわりのない限り，正規分布に関する性質を証明なしに用いてはならないこととする．

[問 1]　確率変数 X_1 について，以下を計算せよ．

$$\mathrm{E}(X_1), \quad \mathrm{Var}(X_1).$$

ただし，$\mathrm{E}(X_1)$ は X_1 の期待値，$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{E}[\{X_1 - \mathrm{E}(X_1)\}^2]$ である．また，$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$ は，証明なしに用いてよい．

[問 2]　確率変数 Y_1 と Y_2 の共分散 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$ を求めよ．ここで，$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{E}[\{Y_1 - \mathrm{E}(Y_1)\}\{Y_2 - \mathrm{E}(Y_2)\}]$ である．

[問 3]　確率ベクトル (Y_1, Y_2) の同時確率密度関数が，

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi(1-a^2)} \exp\left[-\frac{1}{2(1-a^2)^2}\left\{(1+a^2)y_1^2 - 4ay_1y_2 + (1+a^2)y_2^2\right\}\right]$$
$$(-\infty < y_1, y_2 < \infty)$$

で与えられることを示せ．

[問 4]　確率変数 Y_1/Y_2 の確率密度関数を求めよ．

このページは意図的に白紙としている.