A

# 総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
# 5年一貫制博士課程入学試験問題

## 科目 数理

2018年8月21日(火) 10:00〜12:00

### 注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問までである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

# 第1問

[問 1]　次の行列が逆行列を持つか否かを判定せよ．また，逆行列を持つ場合はそれを求め，持たない場合は，その行列に右から乗じると積が零行列となる行列で，零行列ではないものをひとつ求めよ．

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

[問 2]　次の関数を $x$ について微分せよ．

(1)

$$5^{x^2-3x+1}$$

(2)

$$\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \qquad |x|<1$$

[問 3]　次の関数を $|x|<1$ において $x=0$ の周りに $x$ の2次までマクローリン展開せよ．

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

[問 4]　次の3つのベクトルで張られる $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間における正規直交基底を一組求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 第2問

実対称行列は直交行列により対角化できる．$n$ 次実対称行列 $A$ に対し，適当な $n$ 次直交行列 $T$ をとると，

$$TAT^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

とできる．ここで，diag(...) は括弧の中を対角成分とする対角行列を表し，実数 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ は $A$ の固有値である．ただし，$T$ が直交行列であるとは，$T^\top$ を $T$ の転置行列，$E$ を単位行列として，$T$ が $T^\top T = E$ を満たすことをいう．

**[問 1]**　任意の実行列 $B$ について，$B^\top B$ の固有値は非負であることを示せ．

**[問 2]**

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．$B^\top B$ の固有値と，0 でない固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

**[問 3]**　問 2 の $B$ について，$VB^\top BV^{-1}$ を対角行列とする直交行列 $V$ をひとつ求めよ．

A

第3問

[問 1]　実数軸 $\mathbb{R}$ に点 P があり，その位置は平均 0，分散 1 の正規分布に従うとする．P の原点からの距離の 2 乗が $x$ より小さい確率を求めて，P の原点からの距離の 2 乗の確率密度関数が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x>0$$

であることを示せ．

[問 2]　$n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に点 Q があり，その位置 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ は平均ベクトルを $\mathbf{0}$, 分散共分散行列を単位行列とする $n$ 変量正規分布に従うとする．Q の原点からの距離の 2 乗の確率密度関数が

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x>0$$

であることを示せ．ただし，$\Gamma(z)$ はガンマ関数で,

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx$$

で与えられ，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ であることを用いてよい．

[問 3]　問 2 の分布を自由度 $n$ のカイ二乗分布という．独立な確率変数 $X$ と $Y$ があり，$X$ が自由度 $n$ のカイ二乗分布に従い，$Y$ が自由度 $m$ のカイ二乗分布に従うとき，確率変数

$$X+Y, \qquad \frac{X}{X+Y}$$

が独立で，それぞれ自由度 $n+m$ のカイ二乗分布と母数 $(n/2, m/2)$ のベータ分布に従うことを示せ．ただし，母数 $(\alpha,\beta)$ のベータ分布とは，確率密度関数

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0<x<1$$

をもつ分布のことをいう．

A

# 第4問

次の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ の関数についての最大化を考察する．

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} g(\boldsymbol{x}, a_i, \boldsymbol{b}_i),$$

ここで $a_i$ は定数，$\boldsymbol{b}_i$ は定数ベクトルとし，

$$g(\boldsymbol{x}, a, \boldsymbol{b}) = \exp\{-(a - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x})^2\}$$

とする．また，$\boldsymbol{b}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{b}$ の転置を表し，$m \geq p$ と仮定して，行列 $[\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m]$ の階数は $p$ とする．このとき，関数

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} g(\boldsymbol{y}, a_i, \boldsymbol{b}_i)(a_i - \boldsymbol{b}_i^\top \boldsymbol{x})^2,$$

を定義し，ベクトル列 $\{\boldsymbol{x}_t : t \geq 1\}$ を，$\boldsymbol{x}_t$ が与えられたとき，$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)$ を最小とする $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_{t+1}$ とすることで，順次定める．ここで，$\boldsymbol{x}_1$ は $\mathbb{R}^p$ の任意に固定された点とする．

[問 1]　$\boldsymbol{x}_{t+1}$ を $\boldsymbol{x}_t$ の関数として表せ．

[問 2]　任意のスカラー $A$ と $A_0$ に対して

$$\exp(A) - \exp(A_0) \geq (A - A_0)\exp(A_0)$$

が成立することを示せ．

[問 3]　任意の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \quad \geq \quad F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

を示し，任意の $t \geq 1$ に対して $f(\boldsymbol{x}_{t+1}) \geq f(\boldsymbol{x}_t)$ を示せ．

このページは意図的に白紙としている.