A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2018年1月23日 (火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問までである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ________________

$\boxed{\text{A}}$

第1問

[問 1]　行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について，$A+B$, AB を求めよ.

[問 2]　次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

[問 3]　次の積分の値を求めよ.

(1)

$$\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 9x + 14}$$

(2)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

[問 4]　次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$$

$\boxed{\mathrm{A}}$

第2問

正方行列 A に対し，$f_A(x) = |xE - A|$ を A の固有多項式という．$f_A(A) = 0$ となることを Hamilton-Cayley の定理という．$f(A) = 0$ となるようなスカラーを係数とする多項式 $f(x)$ のうち次数が最小かつ最高次の係数が 1 となるものを A の最小多項式という．

[問 1]　$f(A) = 0$ となる多項式はすべて最小多項式で割り切れることを示し，最小多項式 $\varphi_A(x)$ が一意に定まることを示せ．

[問 2]　正則行列 P について，$\varphi_{P^{-1}AP}(x) = \varphi_A(x)$ を示せ．

[問 3]　正方行列 A が，ある正則行列 P について

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_2, \cdots \alpha_s, \cdots, \alpha_s)$$

を満たすとき，A は対角化可能であるという．ただし，diag(...) は括弧の中を対角成分とする対角行列を表す．A が対角化可能であれば，$\varphi_A(x)$ は重根をもたないことを示せ．

[問 4]　行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が対角化可能か否かを判定せよ．

A

第3問

関数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$, $n=3$, $a_1=a_2=0$, $a_3=2$ を考える.

[問 1]　$f(x)$ を最小にする x の値を求めよ.

[問 2]　ある定数 x_0 について，$y=|x-a_i|$, $(i=1,2,3)$ に $x=x_0$ を含む2点で上から接する放物線の式 $y=g_i(x;x_0)$ を求めよ.

[問 3]　$g(x;x_0)=\sum_{i=1}^{3}g_i(x;x_0)$ を最小にする x の値を求めよ.

[問 4]　$x_0=3$ とする．問3で求めた x の値を x_1 とし，x_1 において $y=|x-a_i|$ に $x=x_1$ を含む2点で上から接する放物線の式を $y=g_i(x;x_1)$ とし，$g(x;x_1)=\sum_{i=1}^{3}g_i(x;x_1)$ を最小にする x の値を x_2 とする．このような手続きを繰り返すとき，数列 $x_0,x_1,x_2,\ldots$ が問1で求めた値に収束することを示せ.

A

第4問

2次元正方格子 $\{(x,y); x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$, ($\mathbb{Z}$ は整数の全体を表す) の上を，時間が1進むごとに4つの隣りの格子点のいずれかに等しい確率で移動する動点Pを考える．時刻0でPは原点にいるとし，Pが原点に戻ることを事象 $\mathcal{E}$ とする．

[問1]　時刻 t までに $\mathcal{E}$ が起こる回数を N_t とする．N_5 の期待値 $\mathbb{E}(N_5)$ を求めよ．

[問2]　$\mathcal{E}$ が時刻 t に起こる確率を u_t，$\mathcal{E}$ が時刻 t に初めて起こる確率を f_t とかく．$u_0 = 1$ とする．それぞれについて定義される級数

$$U(s) = \sum_{t=0}^{\infty} u_t s^t, \qquad F(s) = \sum_{t=1}^{\infty} f_t s^t$$

の間の関係 $U(s) = 1/(1 - F(s))$ を導け．

[問3]　$\mathcal{E}$ が i 回起こるまでの待ち時間を T_i とする．その確率 $\mathbb{P}(T_i \leq t)$ について定義される級数

$$G_i(s) = \sum_{t=i}^{\infty} \mathbb{P}(T_i \leq t) s^t$$

を $F(s)$ を用いて表せ．

[問4]　$\mathbb{E}(N_t)$ を $\mathbb{P}(T_i \leq t)$ を用いて表し，$\mathbb{E}(N_t)$ を求めよ．