$\boxed{\text{A}}$

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2017年8月22日(火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ________________

A

第1問

以下の各問いに答えよ．ただし log は自然対数とする．

[問1]　次の行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[問2]　k を 0 でない実数，E_n を n 次単位行列とするとき，$AB - BA = kE_n$ を満たす n 次実正方行列 A, B は存在しないことを示せ．

[問3]　次の関数を 3 次の項までマクローリン展開せよ．

(1) $f(x) = \log(1 + x) + \cos x$

(2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

[問4]　次の定積分を求めよ．

(1)

$$\int_1^2 x \log x \, dx$$

(2)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

A

第2問

$n \times n$ 実正方行列 T_n が次のような形を持つと仮定する.

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}^{(n,i)}$ により第 i 成分のみ 1 で残りが 0 の n 次元ベクトルを表す. このとき

$$T_n \boldsymbol{a}^{(n)} = \boldsymbol{e}^{(n,1)}$$

という線形方程式に関して以下の問いに答えよ. 以下ではベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 k 成分を x_k で表し, $\boldsymbol{x}^T$ で転置ベクトルを表す.

[問1] $n = 2$ のとき $\boldsymbol{a}^{(2)}$ を求めよ. ただし $t_0^2 \neq t_1^2$ とする.

[問2] $n = 2$ のとき, T_2 が非負定値行列であるための必要十分条件を t_0, t_1 を用いて表せ. ここで T_2 が非負定値であるとは, 任意の 2 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x}^T T_2 \boldsymbol{x} \geq 0$ が成り立つことをいう.

[問3] $n-1$ の場合の解 $\boldsymbol{a}^{(n-1)}$ に対し, 成分の順序を逆にした $n-1$ 次元ベクトルを $\bar{\boldsymbol{a}}^{(n-1)}$ とする. すなわち, $\bar{a}_k^{(n-1)} = a_{n-k}^{(n-1)}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ である. このとき,

$$T_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad T_n \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\boldsymbol{a}}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

を, $\boldsymbol{e}^{(n-1,1)}$, $\boldsymbol{e}^{(n-1,n-1)}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(n-1)} t_{n-k}$ を用いて表せ.

[問4] $\boldsymbol{a}^{(n)}$ を, $\boldsymbol{a}^{(n-1)}$, $\bar{\boldsymbol{a}}^{(n-1)}$, および s_n を用いて表せ. ただし $|s_n| \neq 1$ を仮定してよい.

$\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\text{第3問}}$

次の微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

および初期条件

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0$$

からなる初期値問題を考える．ただし A は 2×2 実正方行列とする．

[問 1]　A が以下の場合にそれぞれ上の問題を解け．

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

[問 2]　A が以下の場合に上の問題を解け．

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

A

第4問

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は，互いに独立な確率変数であり，以下の確率密度関数を持つ確率分布にしたがうものとする．

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

ただし，λ は正の定数とする．

以下の問いに答えよ．ただし，$p_X(x)$ を確率変数 X の確率密度関数であるとしたとき，累積分布関数とは，以下の式で定義される関数である．

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt$$

[問 1] X_1 の累積分布関数を求めよ．

[問 2] $Z = X_1 + X_2$ とする．Z の累積分布関数を求めよ．

[問 3] $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする．Y の累積分布関数が次式で与えられることを示せ．

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}\left(1 + \dfrac{\lambda y}{1!} + \cdots + \dfrac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\right) & (y > 0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases}$$