A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2016年8月17日(水) 10:00～12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\mathrm{A}}$

第1問

[問1]　次の関数を x に関して微分せよ．

$$\sin^2 x.$$

[問2]　次の定積分を求めよ．

$$(1) \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx.$$

$$(2) \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

[問3]　次の行列の固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A

第2問

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ とする.

[問1]　A の行列式の値を求めよ.

[問2]　AB を求めよ.

[問3]　$B^T AB$ の固有値の一つは0であることを示せ（ただし B^T は行列 B の転置行列である）.

[問4]　$B^T AB$ の固有値の一つは，小数第三位以下を四捨五入すると5.27である．0と5.27以外の全ての固有値を，小数第二位以下を四捨五入し，小数第一位まで求めよ.

$\boxed{\text{A}}$

第3問

標準正規分布の密度関数と分布関数をそれぞれ $\phi(x)$ と $\Phi(x)$ で表す.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right). \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(v)dv.$$

確率変数 X と Y は独立に標準正規分布に従うとする. λ は実数とする.

[問 1] 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\Pr(Y \le z, X < \lambda Y) = \int_{-\infty}^{z} \Phi(\lambda v)\phi(v)dv.$$

[問 2] 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-z}^{\infty} \{1 - \Phi(\lambda y)\}\phi(y)dy = \int_{-\infty}^{z} \Phi(\lambda v)\phi(v)dv.$$

[問 3] 次で確率変数 Z を定義する.

$$Z = \begin{cases} Y & (X < \lambda Y) \\ -Y & (X \ge \lambda Y) \end{cases}.$$

確率変数 Z の分布関数が以下の式で表されることを示せ.

$$\Pr(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} 2\Phi(\lambda v)\phi(v)dv.$$

A

第４問

m を１以上の整数として，

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \cdot \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$$

とする．

[問１]　$P_1(x)$ と $P_2(x)$ をそれぞれ求めよ．

[問２]　$(x^2-1)^m$ の２項定理による展開を用いて，$P_m(x)$ は m 次多項式であることと，その m 次の係数は

$$\frac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$$

であることを示せ．

[問３]　k を $1 \leq k \leq m$ をみたす整数とする．部分積分を用いて，

$$\int_{-1}^{1} x^k P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & (1 \leq k < m) \\ \dfrac{2^{m+1}(m!)^2}{(2m+1)!} & (k = m) \end{cases}$$

を示せ．必要なら

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m dx = (-1)^m \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}$$

を証明なしに用いてもよい．

[問４]　n を $1 \leq n \leq m$ をみたす整数とする．

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & (1 \leq n < m) \\ \dfrac{2}{2m+1} & (n = m) \end{cases}$$

を示せ．

このページは意図的に白紙としている.