A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2015年8月18日(火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問までである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ______________

A

第1問

[問1]

(1) $x > 0$ で定められる関数

$$f(x) = \left(\frac{x^p + a^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

に対して $x = a$ における微係数 $f'(a)$ を求めよ．ただし，a は正の実数，p は 0 でない実数とする．

(2) 次の関数の最小値を求めよ．

$$f(x) = x \log x \qquad (x > 0)$$

ここで log は自然対数関数を表す．

[問2]

(1) 次の行列の積を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 A の固有値を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[問3]　パラメータ $a > 0, b > 0$ をもつガンマ分布の確率密度関数は

$$f(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$$

で与えられる．ただし，$\Gamma(a)$ はガンマ関数

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \qquad (a > 0)$$

であり，e は自然対数の底である．このとき，ガンマ分布に従う確率変数の期待値を求めよ．

A

第2問

以下の問題に現れる行列はすべての成分が実数である実行列とする．

[問1]　n 次正方行列 A に対して，$XA = AX = I_n$ となる行列 X が存在するとき，A を正則行列という．ただし I_n は n 次単位行列である．

このとき以下の対角行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

が正則行列であるためには，すべての $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ であることが必要かつ十分であることを，上の正則行列の定義に基づいて示せ．

[問2]　n 次正方行列 A と正則行列 P，Q に対して，

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

が成り立つとする．ただし I_r は r 次の単位行列，$O_{m,n}$ はすべての成分が0である m 行 n 列の行列とする．行列 A が正則であるためには，$r = n$，つまり $PAQ = I_n$ であることが必要かつ十分であることを示せ．([問1] の結果を定理として用いてよい．)

[問3]　次の行列 A が正則行列かどうかを判定し，もし正則行列の場合，その逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A

第3問

[問1]　実数 t と確率変数 X，Y に対して関数

$$f(t) = E\big[(X - tY)^2\big]$$

とする．ただし，E は期待値とする．2次モーメント $E(Y^2)$ が正であるとするとき，$f(t)$ の最小値を求めよ．

[問2]　p 次元の実ベクトル $\boldsymbol{t}$ と確率変数 X と p 次元確率ベクトル $\boldsymbol{Y}$ に対して関数

$$g(\boldsymbol{t}) = E\big[(X - \boldsymbol{t}^T\boldsymbol{Y})^2\big]$$

と定める．$\boldsymbol{Y}$ の2次モーメント行列 $E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T)$ が単位行列であるとするとき，$g(\boldsymbol{t})$ の最小値を求めよ．ただし ^{T} は転置をあらわす．

[問3]　上の［問2］の確率ベクトル $\boldsymbol{Y}$ と任意の q 次元確率ベクトル $\boldsymbol{Z}$ に対して，次の不等式を証明せよ．

$$E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Y}^T)E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Z}^T) \leq E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T)$$

ここで，対称行列 A, B に対して $A \leq B$ とは $B - A$ が半正定値行列である，すなわち，任意のベクトル $\boldsymbol{s}$ に対して $\boldsymbol{s}^T(B - A)\boldsymbol{s} \geq 0$ を満たすと定める．

$\boxed{\text{A}}$

第4問

非負整数に値をとる確率変数 Y が

$$\mathrm{P}(Y=y)=\frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}$$

を確率関数にもつとき，Y はパラメータ $\lambda>0$ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うという．

[問1]　ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ の期待値を求めよ．

[問2]　ある会社では機械の生産ラインにAとBがあり，ラインAで生産された機械を使った際の単位時間あたりの不良品の個数の分布は $\mathrm{Po}(1)$，ラインBでは $\mathrm{Po}(3)$ であるとする．ラインAとBの生産比率は $9:1$ である．以下の問題では，$e=2.7$ として計算して解答せよ．

(1) この会社から買った機械を使用した際の単位時間あたりの不良品の個数の期待値を求めよ．

(2) この会社から機械を購入したとき，単位時間あたりの不良品の個数は3個であった．この機械がラインAで製造された確率を求めよ．

(3) この会社のラインAで製造された機械を用いたとき，単位時間あたりの不良品の個数が3個以上となる確率を求めよ．

このページは意図的に白紙としている.