A

# 総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
# 5年一貫制博士課程入学試験問題

## 科目 数理

2015年1月20日(火) 10:00〜12:00

### 注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問までである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

## 第1問

[問 1] 次の関数を $x$ に関して微分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (|x| < a)$

(2) $e^{ax}(\sin bx + \cos bx)$

(3) $x^x \qquad (x > 0)$

[問 2] 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 |\, 2 - x - x^2 \,| \, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan^2 x \, dx$

[問 3] 微分の定義を用いて, 公式 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を証明せよ.

[問 4] 次の行列 $A$ の固有値を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 第2問

[問1]

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続とは，任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，$|x-a|<\delta$ となるすべての $x$ に対して $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ となることである．また2つの関数 $g(x)$, $h(x)$ が $x=a$ で連続であるとき，2つの関数の積 $g(x)h(x)$ も $x=a$ で連続であることが知られる．この2つの関数の積の連続性の定理を用い，関数 $f(x)=x^2$ が定義域の各点で連続であることを示せ．

[問2]　関数 $f(x)=x^3-x+1$ の増減，極大値，極小値，上下への凸，変曲点を調べ，グラフの概形を描け．

[問3]　関数 $f(x)=\dfrac{e^x-1-x}{x^2+x^3}$ の $x\to 0$ の極限を検討する．

(1) 関数 $f(x)$ の分子を2次までテイラー近似し、$\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(2) 下記のロピタルの定理を用い，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．ただし、定理の適用を明示的に記述せよ．

**ロピタルの定理**

2つの関数 $g(x)$ と $h(x)$ が開区間 $(a,b)$ で微分可能であり，$c\in(a,b)$ について $\displaystyle\lim_{x\to c} g(x)=\lim_{x\to c} h(x)=0$ かつ，上の区間の $c$ を除く任意の $x$ に対して $h'(x)\neq 0$ とする．このとき，もし $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{h'(x)}$ が存在するなら

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{h(x)-h(c)}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{第3問}}$

定数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ に対応する $y$ を，係数 $w_0, w_1, w_2$ を用いた下のような線形モデルで表すことを考える.

$$y = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \epsilon$$

ただし，誤差 $\epsilon$ は平均 0, 分散 $\sigma^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ にしたがう確率変数である.

[問 **1**]　$y$ のしたがう確率密度関数を求めよ.

[問 **2**]　いま, データとして

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}) \ \text{のとき}\ y = y_1 \\ \mathbf{x} &= (x_{21}, x_{22}) \ \text{のとき}\ y = y_2 \\ \mathbf{x} &= (x_{31}, x_{32}) \ \text{のとき}\ y = y_3 \\ \mathbf{x} &= (x_{41}, x_{42}) \ \text{のとき}\ y = y_4 \end{aligned}$$

が得られたとする. $\mathbf{w} = (w_0\ w_1\ w_2)^T$, $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1\ \epsilon_2\ \epsilon_3\ \epsilon_4)^T$ と書くとき，適当な行列またはベクトル $\mathbf{X}, \mathbf{y}$ を定義することで, 上の関係を $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w} + \boldsymbol{\epsilon}$ の形で表せ. ここで, $^T$ は転置を表す.

[問 3]　次の関数

$$L = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2$$

を最小にする $\mathbf{w}$ を求めたい. $L$ を $\mathbf{w}$ で微分することにより, $L$ を最小にする $\mathbf{w}$ と $\mathbf{X}$, $\mathbf{y}$ との関係式を求めよ. ただし, 行列 $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{w}$ の微分に対する下の関係は証明なしに使ってよい.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{A}\mathbf{w}) = \mathbf{A}^T.$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{w}) = 2\mathbf{A}\mathbf{w}.$$

[問 4]　上の [問 2] において具体的に,

$$\begin{aligned}
(x_{11}, x_{12}) &= (6,\ 3), & y_1 &= 1 \\
(x_{21}, x_{22}) &= (-2, -1), & y_2 &= 2 \\
(x_{31}, x_{32}) &= (4,\ 2), & y_3 &= -1 \\
(x_{41}, x_{42}) &= (2,\ 1), & y_4 &= 5
\end{aligned}$$

であったとする. このとき, $L$ を最小にする $\mathbf{w}$ は一意に定まらないことを示せ.

## 第4問

確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_p)^T$ が，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_p)^T$ を平均ベクトル，単位行列を分散行列とする多変量正規分布の確率密度関数

$$(2\pi)^{-\frac{p}{2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\Big)$$

を持つとする．このとき，次の問いに答えよ．

[問 1]　次で定める標準正規累積分布関数

$$\Phi(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{t} \exp\big(-\frac{1}{2}x^2\big)dx$$

を使って，期待値 $\mathrm{E}(|X_1| \cdots |X_p|)$ を求めよ．

[問 2]　定数ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ に対して $Y = \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}$ の確率密度関数を求めよ．

[問 3]　上の $\Phi(t)$ を使って，確率 $\mathrm{P}(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X} > \alpha)$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{\beta}$ は定数ベクトル，$\alpha$ は定数とする．

[問 4]　平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ はゼロベクトルでないと仮定する．このとき，任意の $\alpha$ に対して，$\boldsymbol{\beta}$ を単位ベクトル（$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta} = 1$）とするとき，確率 $\mathrm{P}(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X} > \alpha)$ が最大となる $\boldsymbol{\beta}$ を求めよ．