A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2014年8月19日 (火) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.

2. 問題は第1問から第4問までである.

3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.

4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.

5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.

6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.

7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ____________

$\boxed{\text{第1問}}$

[**問1**] 次式が成り立つとき, $\tan\theta$ を求めよ．ただし $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i \neq 0$ とする．

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(\alpha_i-\theta)=0.$$

[**問2**]　2次元極座標変換

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．ただし, $|\cdot|$ は行列式を表す．

[**問3**]　次の無限積の値を求めよ．

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

[**問4**]　g を $-1<g<1$ を満たす定数とするとき，次の定積分を g の関数として求めよ．

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-g^2)x}{(1+g^2-2gx)^{3/2}}\,dx.$$

[**問5**]　確率変数 X_1, X_2 は独立であり，それぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとする．次の期待値を求めよ．

$$(X_1\ X_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

第2問

次々と飛来する粒子を検出する実験を考える．粒子が飛来してから次の粒子が飛来するまでの時間は確率的である．時間間隔を確率変数 T によってあらわすとき，各 T は独立に次の指数分布に従うものとする (図 1).

$$f(t) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), \qquad \lambda, t > 0.$$

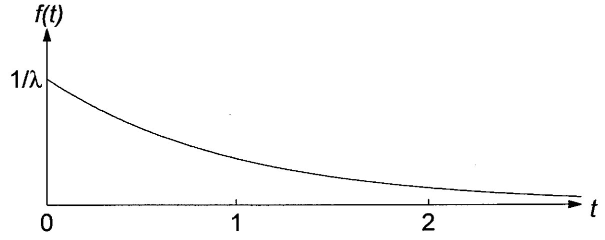

図 1. 指数分布の密度関数.

[**問 1**] 飛来する粒子の時間間隔 T に関して，以下の問いに答えよ.

(1) 飛来する粒子の時間間隔 T の期待値を求めよ.

(2) 飛来する粒子の時間間隔 T が τ よりも大きい確率 $P(T > \tau)$ を求めよ.

[**問 2**]

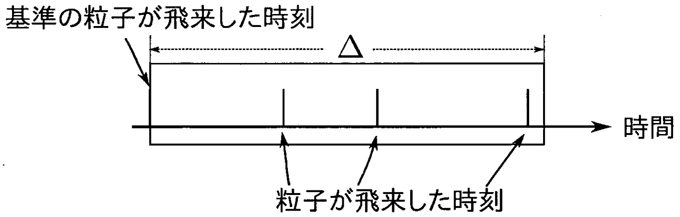

図 2. Δ 時間内に飛来する粒子の数.

ある粒子 (基準となる粒子) が飛来した直後の Δ 時間内に新たに飛来する粒子の個数を X とする (図 2 では $X = 3$ である)． X は非負の整数をとる確率変数である．以下では X の確率分布を考える.

(1) Δ 内に粒子がひとつも検出されない確率 $P(X = 0)$ を求めよ.

(2) Δ 内に粒子がひとつだけ検出される確率 $P(X = 1)$ を求めよ.

(3) 帰納法により $P(X = n)$ がポアソン分布となることを示せ．ただし μ をパラメータとするポアソン分布は次の式で与えられる.

$$P_\mu(X = n) = \frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

第3問

実数を要素とする 3 次の対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

を考える．ただし $a \neq 0, b \neq 0$ とする．

[問 1] A の固有値をすべて求めよ．

[問 2] さらに Q を一般の 3 次の正則行列とし $B = Q^{-1}AQ$ で定義される行列 B を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) λ を任意の実数とするとき，次の等式を示せ．

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - A|.$$

ただし，$|\cdot|$ は行列式，I は 3 次の単位行列とする．

(2) 行列 B の要素を次のように書くことにする．

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

このとき，次の等式を示せ．

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 3a.$$

第4問

全ての要素が 1 で長さ n の縦ベクトル $\mathbf{1}$ に対して，ある $n \times n$ の非負行列 P が $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ を満たすとき，P は確率行列であるという．また，全ての成分が非負で長さ n の縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1$ となるとき $\boldsymbol{x}$ を確率ベクトルとよび ($^\top$ は転置を表す)，ある確率ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}^\top P = \boldsymbol{x}^\top$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}$ を P の定常分布という．

[問 1] 確率行列 P に対し，以下の問いに答えよ．

(1) $P\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ を満たす非零ベクトル $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に対する右固有ベクトル，$\boldsymbol{u}^\top P = \lambda \boldsymbol{u}^\top$ を満たす非零ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固有値 λ に対する左固有ベクトルという．異なる固有値に対する右固有ベクトルと左固有ベクトルの内積がゼロになることを示せ．

(2) P の固有値 λ の絶対値が $|\lambda| \leq 1$ となることを示せ．(必要ならば $\left|\boldsymbol{u}^\top P\right| \preceq \left|\boldsymbol{u}^\top\right| P$ となることを用いよ．ここで，ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ に対し，$|\boldsymbol{a}| = (|a_1|, \cdots, |a_n|)$ であり $\preceq$ はベクトルの成分毎に $\leq$ が成り立つことを示す)．

[問 2] 確率行列 P が重複のない n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ただし $\lambda_1 = 1$) を持つとし，それぞれに対応する右固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, 左固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ と表す．P の定常分布を $\boldsymbol{x}$ とする．$\lambda_1 = 1$ であることから，定義より $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{1}$，$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{x}$ である．$\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{v}_i = 1$, $(i = 1, \ldots, n)$ と規格化してあるとし，以下の問いに答えよ．

(1) P と P の m 乗 P^m が次のように表現されることを示せ．

$$P = \mathbf{1}\boldsymbol{x}^\top + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{u}_i^\top, \quad P^m = \mathbf{1}\boldsymbol{x}^\top + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^m \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{u}_i^\top.$$

(2) P, $\boldsymbol{x}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ を用いて行列 A を次のように定める．このとき A が確率行列であること，また $\boldsymbol{x}$ が A の定常分布であることを示せ．

$$A = \alpha P + (1 - \alpha)\mathbf{1}\boldsymbol{x}^\top.$$

(3) (1) の結果を用いて，以下を示せ．

$$A = \mathbf{1}\boldsymbol{x}^\top + \sum_{i=2}^{n} \alpha\lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{u}_i^\top, \quad A^m = \mathbf{1}\boldsymbol{x}^\top + \sum_{i=2}^{n} (\alpha\lambda_i)^m \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{u}_i^\top.$$