A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2014年1月20日(月) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

第１問

[問 1]

(1) 次の関数を x に関して微分せよ．ただし e は自然対数の底である．

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

[問 2]　次の級数の和を求めよ．

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+4}.$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$

[問 3]

(1) 次の関数を x に関して微分せよ．ただし $\exp(t)$ は e^t と同じ意味である．

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx.$$

ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = 1$ であることを用いてよい．

(3) n を 1 以上の整数とし，次の定積分を求めよ．解答には 2 重階乗の記号 $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$ を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx.$$

第2問

[問 1] 連続確率変数 X_1, X_2 の同時確率密度関数を $f(x_1, x_2)$ と表す．このとき (X_1, X_2) から (Y_1, Y_2) への1対1の変数変換 $Y_1 = \phi_1(X_1, X_2)$, $Y_2 = \phi_2(X_1, X_2)$ を考える．逆変換 $X_1 = \psi_1(Y_1, Y_2)$, $X_2 = \psi_2(Y_1, Y_2)$ の Y_1, Y_2 に関する1階の偏導関数が連続ならば Y_1, Y_2 の同時確率密度関数 $g(y_1, y_2)$ は

$$g(y_1, y_2) = f\big(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)\big)\left|\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right|,$$

となる．ここで $|\cdot|$ は絶対値を表し，$\partial(x_1, x_2)/\partial(y_1, y_2)$ はヤコビ行列である．ヤコビ行列は次のように定義される．

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\psi_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial\psi_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\psi_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

以下では X_1, X_2 は互いに独立な正の実数値をとる連続確率変数であるとし，確率密度関数はそれぞれ $f(x_1) = e^{-x_1}$, $f(x_2) = e^{-x_2}$ だとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1/X_2$ の逆変換 $X_1 = \psi_1(Y_1, Y_2)$, $X_2 = \psi_2(Y_1, Y_2)$ を求めよ．

(2) (1) の変数変換に対し，ヤコビ行列 $\partial(x_1, x_2)/\partial(y_1, y_2)$ の行列式を求めよ．

(3) Y_1, Y_2 の同時確率密度関数 $g(y_1, y_2)$ を求め，Y_1 と Y_2 の独立性を証明せよ．

[問 2] 離散確率変数 X の確率関数が

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

で与えられるとする．ここで $k!$ は k の階乗，λ は正の定数を表す．このとき X はパラメータ λ のポアソン分布に従うという．

いま二つの独立な確率変数 X, Y はそれぞれパラメータ λ, μ のポアソン分布に従うとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $Z = X + Y$ がパラメータ $\lambda + \mu$ のポアソン分布に従うことを示せ．

(2) $m \leq n$ のとき，$X + Y = n$ が与えられたもとで $X = m$ の条件付き確率を示せ．

第3問

$\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{R}$ をそれぞれ $k \times k$, $\ell \times k$, $\ell \times \ell$ の実行列とする．また，以下で現れる逆行列はいずれも存在するものとし，^{T} は転置を表す．

[問 1]　次の等式を示せ．

$$\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^T \right) = \left(\boldsymbol{V}^{-1} + \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{H} \right) \boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^T.$$

[問 2]　次の等式を示せ．

$$\left(\boldsymbol{V}^{-1} + \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{H} \right)^{-1} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^T \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^T \right)^{-1}.$$

[問 3]　a, b, c を実数とする．次のベクトルを計算せよ．

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

[問 4]　次の等式を示せ．

$$\left(\boldsymbol{V}^{-1} + \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{H} \right)^{-1} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^T \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}^T \right)^{-1} \boldsymbol{H}\boldsymbol{V}.$$

[問 5]　さらに，$\boldsymbol{S}$ を $k \times k$ 実行列，$\boldsymbol{I}$ を $k \times k$ 単位行列とする．次の等式を示せ．

$$\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T \boldsymbol{H}^T \left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{R} \right)^{-1} \boldsymbol{H} \right] \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{S} \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{H}\boldsymbol{S} \right)^{-1} \boldsymbol{S}^T.$$

第4問

[問1]　$x \in \Re$ に対して定義された次の $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-b)^2 + \lambda|x|,$$

ただし $b \in \Re$, $\lambda > 0$ であり $|\cdot|$ は絶対値を表す．

$f(x)$ は x の連続関数であり下に有界であることから最小値を持つ．$f(x)$ の最小値を与える x を b と λ を用いて表せ．ただし，$a \in \Re$, $\epsilon > 0$ に対して定義された以下の $S_\epsilon(a)$ の a と ϵ を b, λ を用いて表現することによって解答せよ．

$$S_\epsilon(a) = \begin{cases} a - \epsilon & (a > \epsilon \text{ のとき}) \\ 0 & (-\epsilon < a \leq \epsilon \text{ のとき}) \\ a + \epsilon & (a \leq -\epsilon \text{ のとき}) \end{cases}.$$

[問2]　$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Re^2$ に対して定義された次の $g(\boldsymbol{x})$ に関して以下の問いに答えよ．

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2b)^2 + 2\lambda_1|x_1| + 2\lambda_2|x_2|,$$

ただし，$b \in \Re$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ である．

(1) $g(\boldsymbol{x})$ は $\Re^2$ 上で連続であり下に有界であることから最小値を持つ．以下では $g(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ を求めるアルゴリズムを考える．まず，$\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ として次の $Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を定義する．

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = g(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\left\{(x_1 - x_1') - (x_2 - x_2')\right\}^2.$$

この $Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を用いた次のアルゴリズムを考える．

(i) $t = 0$ とし，初期値 $\boldsymbol{x}_0$ を定める．

(ii) $Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_{t+1}$ とする．

(iii) $\boldsymbol{x}_{t+1}$ が $\boldsymbol{x}_t$ と十分に近ければアルゴリズムを終了する．そうでないときには t の値をひとつ増加させ，(ii) に戻る．

こうして得られるベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_t\}$ に対して次の式が成り立つことを示せ．

$$g(\boldsymbol{x}_t) \geq g(\boldsymbol{x}_{t+1}), \qquad t = 0, 1, 2, \cdots.$$

(2) 上記のアルゴリズムの手続き (ii) において $Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)$ を最小とする $\boldsymbol{x}$ を求めよ．解答には [問 1](2) の $S_\epsilon(a)$ を用い，ϵ, a を b, λ_1, λ_2, および $\boldsymbol{x}_t$ の成分 $x_{t,1}$, $x_{t,2}$ と適切な係数を用いて表現せよ．