A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2013年8月19日(月) 10:00～12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まであり, それぞれ1ページに印刷してある.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙2枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ______________

第 1 問

次の各問いに答えよ．

[問 1] 次の行列 A と B について，AB と BA をそれぞれ求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

[問 2] 次の式を満たす 2 次の正方行列 X を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

[問 3] 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

[問 4] 関数 $f(x) = \sqrt{\log(1+x)} \quad (x > 0)$ の 1 階導関数と 2 階導関数を求めよ．ただし，$\log$ は自然対数を表すものとする．

[問 5] 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1} e^{-x^p} dx \quad (p > 0)$ の値を求めよ．

$\boxed{\text{第2問}}$

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし，線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = 6\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$$

によって定義するとき，次の各問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．

[問 1] $f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$ であることを示せ．

[問 2] $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

[問 3] $\boldsymbol{0}$ を $\mathbb{R}^3$ のゼロベクトルとするとき，f の像 ($\mathrm{Im} f$) と f の核 ($\mathrm{Ker} f$) を次のように定義する:

$$\mathrm{Im} f = \{f(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}, \qquad \mathrm{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}.$$

このとき, $\mathrm{Im} f$ の次元, および $\mathrm{Ker} f$ の次元を求めよ．

[問 4] $\mathrm{Im} f$ に含まれるベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち，$\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でかつ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するものが存在するならば, それらをすべて求めよ．もしそのようなベクトルが存在しないならば, それを証明せよ．

第3問

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=e^x-1$$

によって定義するとき，次の各問いに答えよ．

[問 1] $f(x)-x$ は x に関して,「単調増加である」,「単調減少である」,「どちらでもない」のいずれかを判定せよ．

[問 2] 漸化式

$$x_n=f(x_{n-1}),\quad n=1,2,\ldots$$

に初期値 $x_0\in\mathbb{R}$ を与えたときの数列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ について，次の各問いに答えよ．

(2.1) 初期値 x_0 が $-1,0,1$ のそれぞれである場合について，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ が存在するならばそれを求め，発散または振動するならばその理由を述べよ．

(2.2) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ が存在するような初期値 x_0 の範囲を定め，その極限を求めよ．

第４問

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ は，2 次元の正規分布

$$N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

にしたがう確率ベクトルであるとする．また，1 次元の確率変数 X_1, X_2 の確率密度関数をそれぞれ f_1 および f_2 とおく．任意の $r \in [0,1]$ に対し，確率変数 Y_r と確率密度関数 g_r を，それぞれ

$$Y_r = rX_1 + (1-r)X_2$$

と

$$g_r(x) = rf_1(x) + (1-r)f_2(x)$$

によって定義するとき，次の各問いに答えよ．

[問 1] 確率変数 Y_r の平均と分散を求めよ．

[問 2] 確率密度関数 g_r を持つ分布の平均と分散を求めよ．

[問 3] Y_r の確率密度関数が g_r となるような r が存在するならばそれを求め，そうでないならばその理由を述べよ．

[問 4] 与えられた $r \in (0,1)$ に対し，確率密度関数 g_r を持つ分布にしたがう確率変数を，X_1, X_2，および，必要に応じて定数 r や別の確率変数も用いることによって構成せよ．

このページは意図的に白紙としている.