A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2013年1月21日 (月) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第 1 問

次の各問いに答えよ.

[問 1] 次の行列 A, B について，AB と BA をそれぞれ求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[問 2] 次の式を満たす 2 次の正方行列 X を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

[問 3] 次の行列 A, B について， 固有値と，それに対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

[問 4] 実数上の関数 $f(x), g(x)$ を次の式で与えるとき，それらの x に関する 1 階導関数と 2 階導関数をそれぞれ求めよ．ただし log は自然対数を表すものとする.

$$f(x) = e^{x^2} - 1, \qquad g(x) = \log(1 + x^2).$$

[問 5] 次の定積分の値をそれぞれ求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \cos 3x dx, \qquad \int_e^{2e} \frac{1}{x(x+e)} dx.$$

第2問

3 次の正方行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

に対して $A = Q\Lambda P$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

[問1] PQ, QP および A を求めよ．

[問2] 正の整数 n に対し，A^n を求めよ．

[問3] 正の整数の列 $\{k\}$ に対し，$\lim_{k\to\infty} A^{2k}$ および $\lim_{k\to\infty} A^{2k+1}$ を求めよ．

[問4] [問1] で求めた行列 A の第 i 行，第 j 列の成分を a_{ij} とおき，漸化式

$$\begin{aligned} x_n - a_{11}x_{n-1} - a_{12}y_{n-1} - a_{13}z_{n-1} &= 0, \\ y_n - a_{21}x_{n-1} - a_{22}y_{n-1} - a_{23}z_{n-1} &= 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \\ z_n - a_{31}x_{n-1} - a_{32}y_{n-1} - a_{33}z_{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

を考える．初期値 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$ を与えるとき，数列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, $\{y_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, $\{z_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の一般項を求めよ．すなわち，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対する x_n, y_n および z_n を，n と定数のみを用いた式で表せ．

第3問

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表すとき，次の各問いに答えよ．

[問1] $\mathbb{R}$ 上の関数 g_1 を

$$g_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

によって定義するとき，次の各小設問に答えよ．

(1.1) 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $g_1(x) \geq 0$ であることを証明せよ．

(1.2) $\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)dx = \infty$ であることを証明せよ．

[問2] 任意の正の整数 p に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 g_p を

$$g_p(x) = 1 + \sum_{r=1}^{p} \left\{ \frac{1}{(2r-1)!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^{2r-1} + \frac{1}{(2r)!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^{2r} \right\}$$

によって定義する（$p = 1$ の場合が [問1] の g_1 である）．[問2] を通じて p は固定された任意の正の整数であるとして，次の各小設問に答えよ．

(2.1) 任意の正の数 a に対して，g_p は有界閉区間 $[-a, a]$ 上で可積分である（すなわち，有限な定積分の値をもつ）ことを証明せよ．

(2.2) $x \to \infty$ とするとき，$g_p(x)$ が収束するか，発散するか，いずれでもないかを判定せよ．収束するならば $\lim_{x\to\infty} g_p(x)$ を求め，そうでないならばその理由を述べよ．

(2.3) $\int_{-\infty}^{\infty} g_p(x)dx = \infty$ であることを証明せよ．

[問3] [問2] の冒頭で与えた関数 g_p を，p についての関数列とみなすとき，各 $x \in \mathbb{R}$ に対し，極限 $\lim_{p\to\infty} g_p(x) =: g_\infty(x)$ は存在する．この関数 g_∞ を求め，それが $\mathbb{R}$ 上で可積分であるかどうかを判定せよ．可積分であるならば $\int_{-\infty}^{\infty} g_\infty(x)dx$ を求め，そうでないならばその理由を述べよ．

第4問

パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布とは，密度関数が

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

によって与えられる実数空間上の確率分布であり，これを $\mathrm{Exp}(\lambda)$ と表すことにする．$X_1, X_2, \ldots$ が独立に同一の確率分布 $\mathrm{Exp}(1)$ にしたがう確率変数列であるとき，次の各問いに答えよ．

[問 1] 与えられた定数 $0 \leq a < b < \infty$ に対し，確率 $\Pr(X_1 \leq a)$，$\Pr(a < X_1 \leq b)$，$\Pr(X_1 > b)$ をそれぞれ求めよ．

[問 2] $Y = \max(X_1, X_2)$，$Z = \min(X_1, X_2)$ とおくとき，次の各小設問に答えよ．

(2.1) Y, Z のそれぞれがしたがう確率分布の分布関数 $F_Y(y)$ と $F_Z(z)$ を求めよ．

(2.2) (Y, Z) がしたがう確率分布の同時密度関数 $f_{(Y,Z)}(y, z)$ を求めよ．

(2.3) $Y - Z$ が確率分布 $\mathrm{Exp}(1)$ にしたがうことを証明せよ．

[問 3] 整数 $n \geq 2$ に対して，$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$，$Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ とおく（それぞれ，$n = 2$ の場合が [問 2] の Y, Z である）．このとき，次の各小設問に答えよ．

(3.1) Y_n と Z_n のそれぞれがしたがう確率分布の分布関数 $F_{Y_n}(y)$ と $F_{Z_n}(z)$ を求めよ．

(3.2) nZ_n が確率分布 $\mathrm{Exp}(1)$ にしたがうことを証明せよ．また，$g(Y_n)$ が確率分布 $\mathrm{Exp}(1)$ にしたがうように，関数 g を定めよ．

(3.3) $Y_n - Z_n$ と Y_{n-1} のそれぞれがしたがう確率分布の分布関数は同一であることを証明せよ．ただし $n = 2$ の場合には，$Y_1 = Z_1 = X_1$ と定義する．

このページは意図的に白紙としている.