A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2012年1月16日 (月) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{第1問}}$

[問 1]　行列 A,B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とするとき, 行列の積 AB および BA を求めよ.

[問 2]　xy 平面上の曲線 $y = x^2 + ax + 2b$ が点 $(1,1)$ を通り, かつ, x が実数軸上を動くときの y の最小値が -3 であるとする. このような a と b の値の組をすべて求めよ.

[問 3]

(1) 関数

$$f(x) = \log\left(e^x + e^{-x}\right)$$

の導関数 $f'(x)$ を求めよ. ただし, log は自然対数を意味し, e はその底とする.

(2) 定積分

$$\int_1^4 \frac{1}{4x+2}\,dx$$

を計算せよ.

[問 4]　A,B を実数を成分とする 2×2 行列とするとき, 以下のそれぞれの条件を満たす A,B の組を一組挙げよ. ただし, O は零行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, I は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(1) $AB \neq BA$

(2) $A \neq O$, $B \neq O$, $AB = O$

(3) $A^2 = I$, $B^2 = I$, $A \neq B$, $A \neq -B$

注意　複数の解のうちどれか一組をあげればよい. たとえば, 条件が「$A + B = AB$」であれば, $A = O$, $B = O$ としても, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ としても, いずれも正解とする.

$\boxed{\text{第 2 問}}$

システムのとりうる状態 i が 3 つあるとし, それぞれを $i = 1, 2, 3$ と表記する. また, システムが時刻 $t = 1, 2, 3, \ldots$ で状態 i にある確率を $P^{(t)}(i)$ とし, 時刻 t にシステムが状態 i にあるときに, 時刻 $t+1$ で状態 j にある確率 (遷移確率) を $P(i \to j)$ とする. たとえば

$$P^{(t+1)}(1) = P^{(t)}(1)P(1 \to 1) + P^{(t)}(2)P(2 \to 1) + P^{(t)}(3)P(3 \to 1)$$

のような式が成立する. 遷移確率 $P(i \to j)$ が t に依存せず

$$P(1 \to 2) = P(2 \to 3) = P(3 \to 1) = 2/3$$
$$P(1 \to 1) = P(2 \to 2) = P(3 \to 3) = 1/3$$
$$P(2 \to 1) = P(3 \to 2) = P(1 \to 3) = 0$$

のように与えられているとして, 以下の問いに答えよ.

(1) $P^{(t)}(1) = 1, P^{(t)}(2) = P^{(t)}(3) = 0$ のときの $P^{(t+2)}(1)$, $P^{(t+2)}(2)$, $P^{(t+2)}(3)$ を求めよ.

(2) $P^{(t)}(1) = P^{(t)}(2) = P^{(t)}(3) = 1/3$ のときの $P^{(t+2)}(1)$, $P^{(t+2)}(2)$, $P^{(t+2)}(3)$ を求めよ.

(3) 行列

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求めよ.

(4) $\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(1)$ が $P^{(1)}(1)$, $P^{(1)}(2)$, $P^{(1)}(3)$ の値に依存しないことを示せ. またその値を求めよ.

$\boxed{\text{第 3 問}}$

3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，この空間には通常のユークリッド内積が定義されているとする．

(1) 3 つのベクトルの組 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は線形独立であることを示せ.

(2) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ を満たす 3 次の正方行列 A を考える．このとき，行列 A の階数 $\mathrm{rank} A$ を求めよ．また，その理由を簡潔に述べよ．

(3) 行列 A の表す $\boldsymbol{R}^3$ 上の線形変換 L_A の核 $\mathrm{Ker} L_A = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は，$\boldsymbol{R}^3$ の線形部分空間であることを示せ.

(4) $\mathrm{Ker} L_A$ の次元を求めよ．また，その基底を 1 つ挙げよ．

(5) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の生成する線形部分空間を W とする．すなわち，$W = \{\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} \mid \lambda \in \boldsymbol{R},\ \mu \in \boldsymbol{R}\}$ とするとき，ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の W への正射影 (直交射影) を求めよ．

$\boxed{\text{第 4 問}}$

実数値関数 $f(x)$ は開区間 (a,b) 上の凸関数であるとする．つまり，$\lambda_1+\lambda_2=1,\ 0\le\lambda_1\le 1,$ $0\le\lambda_2\le 1$ を満たす任意の λ_1,λ_2 と，任意の $x_1,x_2\in(a,b)$ に対して，

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$$

が成り立つとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1,\ 0\le\lambda_i\le 1\ (i=1,\ldots,n)$ を満たす任意の $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ と，任意の $x_1,\ldots,x_n\in(a,b)$ に対して，

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$$

が成り立つことを示せ．ただし，n は 2 以上の任意の自然数とする．
(ヒント：n に関する数学的帰納法を用いよ)

(2) $a<x_1<x_2<x_3<b$ である任意の x_1,x_2,x_3 に対して，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 凸関数 $f(x)$ については，任意の $x\in(a,b)$ において，左右の片側微分係数

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

が存在することが知られている．ただし，$\Delta x\to -0,\ \Delta x\to +0$ はそれぞれ，負の方向，正の方向から Δx を 0 に近づけることを意味する．このとき，常に $f'_-(x)\le f'_+(x)$ であることを示せ．また，ある $x_0\in(a,b)$ において $f'_-(x_0)<f'_+(x_0)$ が成り立つような凸関数 $f(x)$ の例を一つ挙げよ．

(4) 任意の $x_1,x_2\in(a,b)$ と，$f'_-(x_1)\le c\le f'_+(x_1)$ を満たす任意の c に対して，

$$f(x_2)\ge f(x_1)+c(x_2-x_1)$$

が成り立つことを示せ．

(5) 開区間 (a,b) に値を取る確率変数 X に対し，期待値 $E(X)$ と $E(f(X))$ が存在するとき，Jensen の不等式 $E(f(X))\ge f(E(X))$ が成り立つことを示せ．